13.1.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{\tfrac{27}{2}}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-4}}$$

Rozwiązujemy równanie $\frac{27}{2} \cdot q \cdot q \cdot q = -4$, czyli $\frac{27}{2} q^3 = -4$, wynikające z powyższego schematu.

$\frac{27}{2} q^3 = -4 \qquad |\cdot 2$

$\mathbf{2} \cdot \frac{27}{2} q^3 = \mathbf{2} \cdot (-4)$

$27q^3 = -8 \qquad |:27$

$q^3 = \frac{-8}{27}$

$q = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

Odp. **B**

13.2.

$$\boxed{b_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-64}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{b_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{b_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-1}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{b_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{b_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{b_8}$$

Rozwiązujemy równanie $-64 \cdot q \cdot q \cdot q = -1$, czyli $-64q^3 = -1$, wynikające z powyższego schematu.

$-64q^3 = -1 \qquad |:(-1)$

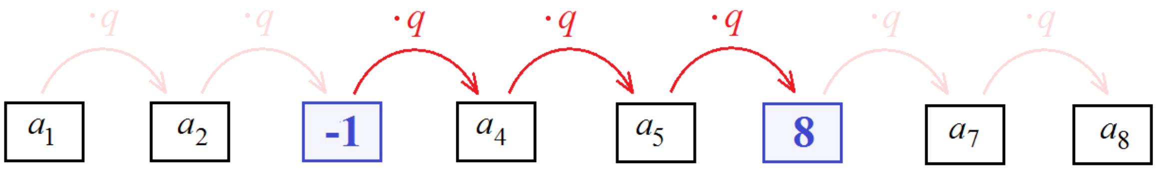
$64q^3 = 1 \qquad |:64$

$q^3 = \frac{1}{64}$

$q = \mathbf{\frac{1}{4}}$

Odp. **C**

13.3.



Rozwiązujemy równanie $-1 \cdot q \cdot q \cdot q = 8$, czyli $-q^3 = 8$, wynikające z powyższego schematu.

$-q^3 = 8 \qquad |:(-1)$

$q^3 = -8$

$q = \mathbf{-2}$

Odp. **B**

13.4.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-3}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{81}}$$

Rozwiązujemy równanie $-3\cdot q\cdot q\cdot q=81$, czyli $-3q^3=81$, wynikające z powyższego schematu.

$-3q^3=81 \qquad |:(-3)$

$q^3=-27$

$q=\mathbf{-3}$

Odp. **A**

13.5.

$$\begin{tikzcd} \boxed{a_1} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_2} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_3} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_4} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{\frac{3}{2}} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_6} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_7} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{\mathbf{12}} \end{tikzcd}$$

Rozwiązujemy równanie $\frac{3}{2} \cdot q \cdot q \cdot q = 12$, czyli $\frac{3}{2} q^3 = 12$, wynikające z powyższego schematu.

$\frac{3}{2} q^3 = 12 \qquad |\cdot \mathbf{2}$

$\mathbf{2} \cdot \frac{3}{2} q^3 = \mathbf{2} \cdot 12$

$3q^3 = 24 \qquad |:3$

$q^3 = \frac{24}{3}$

$q^3 = 8$

$q = \mathbf{2}$

Odp. **D**

13.6.

Rozwiązanie I:

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{32\sqrt{2}}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Rozwiązujemy równanie $32\sqrt{2}\cdot q\cdot q\cdot q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $32\sqrt{2}\,q^3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, wynikające z powyższego schematu.

$$32\sqrt{2}\,q^3=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$\mathbf{2}\cdot 32\sqrt{2}\,q^3=\mathbf{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$64\sqrt{2}\,q^3=-\sqrt{2} \qquad |:\sqrt{2}$$

$$64q^3=-1 \qquad |:64$$

$$q^3=-\frac{1}{64}$$

$$q=-\mathbf{\frac{1}{4}}$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:
Wartości ilorazu q, proponowane w odpowiedziach, zapisujemy w postaci dziesiętnej.
Korzystamy z przybliżenia $\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

A. $-\frac{1}{2}=\mathbf{-0{,}5}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx-\frac{1{,}41}{2}=\mathbf{-0{,}705}$ C. $-\frac{1}{4}=\mathbf{-0{,}25}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\approx-\frac{1{,}41}{4}\approx\mathbf{-0{,}35}$

Wyrazy ciągu $a_4=32\sqrt{2}$ oraz $a_7=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ liczymy w przybliżeniu:

$a_4=32\sqrt{2}\approx 32\cdot 1{,}41=\mathbf{45{,}12}$ oraz $a_7=-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx-\frac{1{,}41}{2}=\mathbf{-0{,}705}$.

Uwzględniamy to w poniższym schemacie:

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{45{,}12}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{-0{,}705}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Sprawdzamy odpowiedzi, używając kalkulatora i przybliżeń wartości ilorazu ciągu ***q*** zawartych w odpowiedziach:

naciskamy:	q	$\times$	a_4	$=$	$=$	$=$
widzimy na wyświetlaczu:	q	q	a_4	a_5	a_6	a_7

A. $q = -0{,}5$, $a_4 = 45{,}12$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = -0{,}705$.

Wciskamy:

−	0	,	5	×	4	5	,	1	2	=	=	=

→ $a_7 = -5{,}64\ldots$

B. $q = -0{,}705$, $a_4 = 45{,}12$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = -0{,}705$.

−	0	,	7	0	5	×	4	5	,	1	2	=	=	=

→ $a_7 = -15{,}81\ldots$

C. $q = -0{,}25$, $a_4 = 45{,}12$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = -0{,}705$.

−	0	,	2	5	×	4	5	,	1	2	=	=	=

→ $a_7 = -0{,}705$

Wynik uzyskany w wyniku obliczeń w odp. **C** się zgadza, otrzymaliśmy $a_7 = -0{,}705$.
Odp. **C** jest poprawna.

13.7.
Rozwiązanie I:

$$\boxed{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3} \cdot q = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, czyli $\sqrt{3}\, q = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, wynikające z powyższego schematu.

$$\sqrt{3}\, q = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad |\cdot \mathbf{3}$$

$$\mathbf{3}\sqrt{3}\, q = \mathbf{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$3\sqrt{3}\, q = -2\sqrt{3} \qquad |: \sqrt{3}$$

$$3q = -2 \qquad |:3$$

$$q = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:
Sprawdzamy poszczególne odpowiedzi, wstawiając proponowane wartości ilorazu ciągu ***q***:

A $\quad \boxed{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)} \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$$\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\mathbf{4}\sqrt{3}}{\mathbf{9}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

równość fałszywa

B $\quad \boxed{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)} \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$$\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\mathbf{9}\sqrt{3}}{\mathbf{4}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

równość fałszywa

C $\quad \boxed{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$$\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\mathbf{3}\sqrt{3}}{\mathbf{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

równość fałszywa

D $\quad \boxed{\sqrt{3}} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$$\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\mathbf{2}\sqrt{3}}{\mathbf{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

równość **prawdziwa**

Mnożąc $a_1 = \sqrt{3}$ przez $q = -\frac{2}{3}$ otrzymamy $a_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Odp. **D** jest prawidłowa.

13.8.
Rozwiązanie I:

$$\boxed{-8} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{4\sqrt{2}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Rozwiązujemy równanie $-8 \cdot q = 4\sqrt{2}$, czyli $-8q = 4\sqrt{2}$, wynikające z powyższego schematu.

$-8q = 4\sqrt{2} \qquad |:(-8)$

$q = \dfrac{4\sqrt{2}}{-8}$

$q = -\dfrac{4\sqrt{2}}{8}$

$q = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Korzystając z $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, przybliżamy $b = 4\sqrt{2} \approx 4 \cdot 1{,}41 = \mathbf{5{,}64}$ oraz wartości ilorazu ***q*** proponowane w odpowiedziach:

A. $q = \mathbf{-1}$

B. $q = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx -\dfrac{1{,}41}{2} = \mathbf{-0{,}705}$

C. $q = -2\sqrt{2} \approx -2 \cdot 1{,}41 = \mathbf{-2{,}82}$

D. $q = -4\sqrt{2} \approx -4 \cdot 1{,}41 = \mathbf{-5{,}64}$

A $\boxed{-8} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{5{,}64}$

$-8 \cdot (-1) = 5{,}64$

$\mathbf{8 = 5{,}64}$

równość fałszywa

B $\boxed{-8} \xrightarrow{\cdot(-0{,}705)} \boxed{5{,}64}$

$-8 \cdot (-0{,}705) = 5{,}64$

$\mathbf{5{,}64 = 5{,}64}$

równość **prawdziwa**

C $\boxed{-8} \xrightarrow{\cdot(-2{,}82)} \boxed{5{,}64}$

$-8 \cdot (-2{,}82) = 5{,}64$

$\mathbf{22{,}56 = 5{,}64}$

równość fałszywa

D $\boxed{-8} \xrightarrow{\cdot(-5{,}64)} \boxed{5{,}64}$

$-8 \cdot (-5{,}64) = 5{,}64$

$\mathbf{45{,}12 = 5{,}64}$

równość fałszywa

Okazuje się, że tylko dla $q = \mathbf{-0{,}705}$ otrzymaliśmy prawdziwą równość. Odp. **B** jest poprawna.

13.9.

Rozwiązanie I:

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\sqrt{5}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{32\sqrt{5}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{5}\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q = 32\sqrt{5}$, czyli $\sqrt{5}\,q^5 = 32\sqrt{5}$, wynikające z powyższego schematu.

$\sqrt{5}\,q^5 = 32\sqrt{5} \qquad |:\sqrt{5}$

$q^5 = 32 \qquad |\sqrt[5]{\ }$

$q = \sqrt[5]{32}$

$q = \mathbf{2}$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Wartości ilorazu q, proponowane w odpowiedziach, zapisujemy w postaci dziesiętnej. Korzystamy z przybliżenia $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

A. $2\sqrt{5} \approx 2\cdot 2{,}24 = \mathbf{4{,}48}$ B. $\frac{32}{5} = \mathbf{6{,}4}$ C. $\mathbf{2}$ D. $\frac{32}{5}\sqrt{5} \approx 6{,}4\cdot 2{,}24 = \mathbf{14{,}366}$.

Wyrazy ciągu $a_2 = \sqrt{5}$ oraz $a_7 = 32\sqrt{5}$ liczymy w przybliżeniu:

$a_2 = \sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$ oraz $a_7 = 32\sqrt{5} \approx 32\cdot 2{,}24 = \mathbf{71{,}68}$.

Uwzględniamy to w poniższym schemacie:

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{2{,}24} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{71{,}68} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Sprawdzamy odpowiedzi, używając kalkulatora i przybliżeń wartości ilorazu q zawartych w odpowiedziach:

naciskamy:	q	×	a_2	=	=	=	=	=
widzimy na wyświetlaczu:	q	q	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

A. $q = 4{,}48$, $a_2 = 2{,}24$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = 71{,}68$.

4	,	4	8	×	2	,	2	4	=	=	=	=	=

→ $a_7 = 4042{,}39\ldots$

B. $q = 6{,}4$, $a_4 = 2{,}24$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = 71{,}68$.

6	,	4	×	2	,	2	4	=	=	=	=	=

→ $a_7 = 24051{,}8\ldots$

C. $q = 2$, $a_4 = 2{,}24$, sprawdzamy, czy otrzymamy $a_7 = 71{,}68$.

2	×	2	,	2	4	=	=	=	=	=

→ $a_7 = 71{,}68$.

Wynik uzyskany w wyniku obliczeń w odp. **C** się zgadza, otrzymaliśmy $a_7 = 71{,}68$.

Odp. **C** jest poprawna.

13.10.

Rozwiązanie I:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{a_1} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_2} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_3} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_4} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{\sqrt{2}} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{\sqrt{8}} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_7} \arrow[r, bend left, "\cdot q"] & \boxed{a_8}
\end{tikzcd}$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{2} \cdot q = \sqrt{8}$, czyli $\sqrt{2}\,q = \sqrt{8}$, wynikające z powyższego schematu.

$$\sqrt{2}\,q = \sqrt{8} \qquad |:\sqrt{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{8:2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Korzystamy z przybliżeń $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{6} \approx 2{,}45$, $\sqrt{8} \approx 2{,}83$.

Przedstawiamy proponowane w odpowiedziach wartości ilorazu $\boldsymbol{q}$ w postaci dziesiętnej:

A. $q = \sqrt{6} \approx \mathbf{2{,}45}$ B. $q = \mathbf{2}$ C. $q = \mathbf{4}$ D. $q = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}41 = \mathbf{2{,}82}$

Wyrazy ciągu $a_5 = \sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$ oraz $a_6 = \sqrt{8} \approx \mathbf{2{,}83}$.

A
$$\begin{tikzcd}
\boxed{1{,}41} \arrow[r, bend left, "\cdot 2{,}45"] & \boxed{2{,}83}
\end{tikzcd}$$
$1{,}41 \cdot 2{,}45 = 2{,}83$

$3{,}4545 = 2{,}83$

B
$$\begin{tikzcd}
\boxed{1{,}41} \arrow[r, bend left, "\cdot 2"] & \boxed{2{,}83}
\end{tikzcd}$$
$1{,}41 \cdot 2 = 2{,}83$

$\mathbf{2{,}82 = 2{,}83}$

C
$$\begin{tikzcd}
\boxed{1{,}41} \arrow[r, bend left, "\cdot 4"] & \boxed{2{,}83}
\end{tikzcd}$$
$1{,}41 \cdot 4 = 2{,}83$

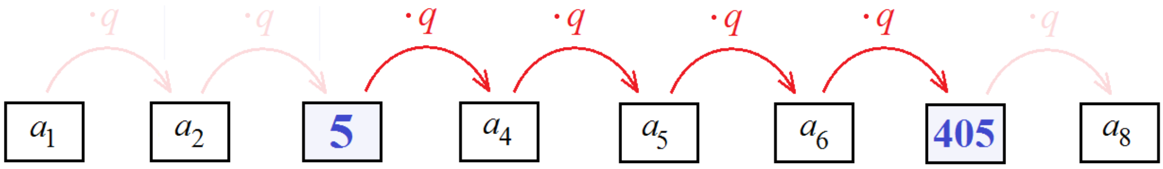
$5{,}64 = 2{,}83$

D
$$\begin{tikzcd}
\boxed{1{,}41} \arrow[r, bend left, "\cdot 2{,}82"] & \boxed{2{,}83}
\end{tikzcd}$$
$1{,}41 \cdot 2{,}82 = 2{,}83$

$3{,}9762 = 2{,}83$

Okazuje się, że dla $q = \mathbf{2}$ w odp. **B** otrzymaliśmy równość **najbardziej zbliżoną do prawdziwej**. Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

13.11.



Rozwiązujemy równanie $5 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 405$, czyli $5q^4 = 405$, wynikające z powyższego schematu.

$5q^4 = 405 \qquad |:5$

$q^4 = 81$

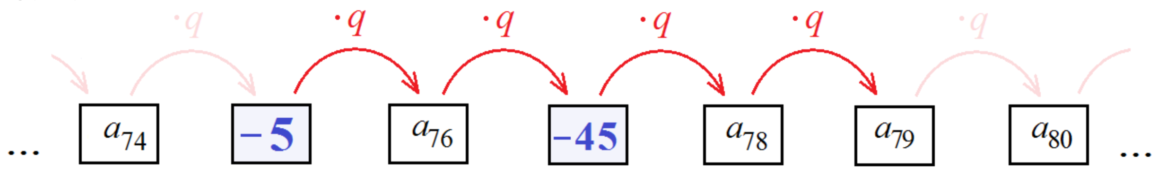
$q = \sqrt[4]{81}$ lub $q = -\sqrt[4]{81}$

$q = 3$ lub $q = -3$

Odrzucamy $\boldsymbol{q = 3}$, bo wtedy wszystkie wyrazy byłyby dodatnie (miałyby te same znaki). Zatem pozostaje $\boldsymbol{q = -3}$.

Odp. **D**

13.12.



Rozwiązujemy równanie $-5 \cdot q \cdot q = -45$, czyli $-5q^2 = -45$, wynikające z powyższego schematu.

$-5q^2 = -45 \qquad |:(-5)$

$q^2 = 9 \qquad |\sqrt{\ }$

$q = 3$ lub $q = -3$

Odrzucamy $\boldsymbol{q = -3}$, bo wtedy sąsiednie wyrazy miałyby przeciwne znaki.
Zatem pozostaje $\boldsymbol{q = 3}$.

Odp. **C**

13.13.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{6}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\mathbf{96}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8} \xrightarrow{} \ldots$$

Rozwiązujemy równanie $6 \cdot q \cdot q = 96$, czyli $6q^2 = 96$, wynikające z powyższego schematu.

$6q^2 = 96 \qquad |:6$

$q^2 = 16$

$q = 4 \quad$ lub $\quad q = -4$

Odrzucamy $\boldsymbol{q = 4}$, bo wtedy wszystkie wyrazy byłyby dodatnie.
Zatem pozostaje $\boldsymbol{q = -4}$.

Odp. **A**

13.14.

$$\dots \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_{13}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_{15}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{9} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_{17}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_{18}} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_{19}} \xrightarrow{\cdot q} \dots$$

Rozwiązujemy równanie $4 \cdot q \cdot q = 9$, czyli $4q^2 = 9$, wynikające z powyższego schematu.

$4q^2 = 9 \qquad |:4$

$q^2 = \frac{9}{4}$

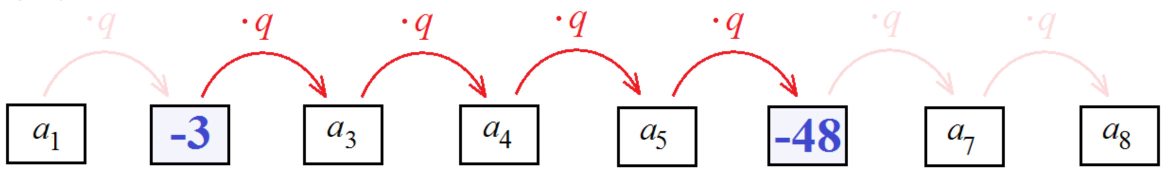
$q = \frac{3}{2}$ lub $q = -\frac{3}{2}$

Odrzucamy $q = \frac{3}{2}$, bo wtedy wszystkie wyrazy byłyby dodatnie.

Zatem pozostaje $q = -\mathbf{\frac{3}{2}}$.

Odp. **B**

13.15.



Rozwiązujemy równanie $-3 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = -48$, czyli $-3q^4 = -48$, wynikające z powyższego schematu.

$-3q^4 = -48 \qquad |:(-3)$

$q^4 = 16$

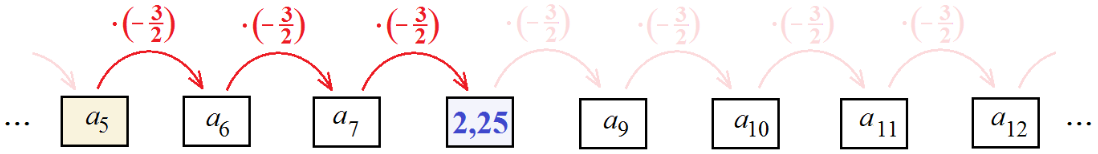
$q = \sqrt[4]{16}$ lub $q = -\sqrt[4]{16}$

$q = 2$ lub $q = -2$

Odrzucamy $q = -2$, bo wtedy sąsiednie wyrazy miałyby przeciwne znaki.
Zatem pozostaje $q = \mathbf{2}$.

Odp. **C**

13.16.



Obliczamy a_5. Układamy równanie $a_5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=2{,}25$, czyli

$a_5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3=2{,}25$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je:

$$a_5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3=2{,}25$$

$$a_5\cdot\left(\frac{-27}{8}\right)=2{,}25$$

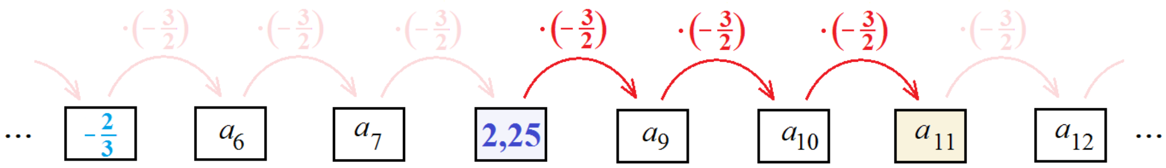
$$-\frac{27}{8}a_5=2{,}25 \qquad |\cdot 8$$

$$\mathbf{8}\cdot\left(-\frac{27}{8}a_5\right)=\mathbf{8}\cdot 2{,}25$$

$$-27a_5=18 \qquad |:(-27)$$

$$a_5=\frac{18}{-27}=-\frac{2}{3}$$

Odrzucamy w ten sposób odpowiedzi A i B. Obliczamy a_{11}:



$$2{,}25\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=a_{11}$$

$$2{,}25\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3=a_{11}$$

$$2{,}25\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)=a_{11}$$

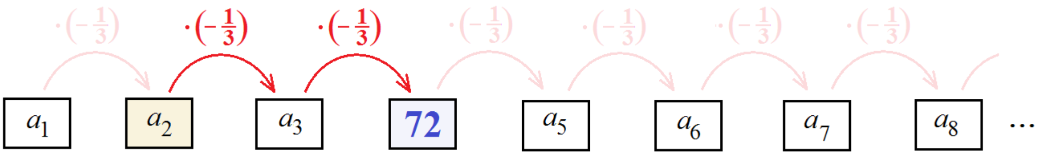
$$-\frac{2{,}25\cdot 27}{8}=a_{11}$$

$$\mathbf{-7{,}59375}=a_{11}$$

$$-\frac{243}{32}=\mathbf{-7{,}59375}=a_{11}.$$

Odp. **C**

13.17.



Obliczamy a_2. Układamy równanie $a_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 72$, czyli $a_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 72$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je:

$$a_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 72$$

$$a_2 \cdot \frac{1}{9} = 72$$

$$\frac{1}{9} a_2 = 72 \qquad | \cdot \mathbf{9}$$

$$\mathbf{9} \cdot \frac{1}{9} a_2 = \mathbf{9} \cdot 72$$

$$a_2 = \mathbf{648}$$

Odp. **D**

13.18.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{3} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_8} \xrightarrow{\cdot(-2)} \boxed{a_9}$$

Obliczamy a_5. Układamy równanie $a_5 \cdot (-2) = 3$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je:

$a_5 \cdot (-2) = 3$

$-2a_5 = 3 \qquad |:(-2)$

$a_5 = \frac{3}{-2} = \mathbf{-1{,}5}$

Odp. **C**

13.19.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{-3} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot(-3)} \boxed{a_8} \ \ldots$$

Obliczamy a_2. Układamy równanie $a_4 \cdot q \cdot q \cdot q = a_7$, czyli $a_4 \cdot q^3 = a_7$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je. Z treści zadania wiemy, że $a_4 = -3$ oraz $q = -3$.

$a_4 \cdot q^3 = a_7$

$(-3) \cdot (-3)^3 = a_7$

$(-3) \cdot (-27) = a_7$

$\mathbf{81} = a_7$

Odp. **C**

13.20.

$$\ldots\ \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_8} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{25} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{10}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{11}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{12}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{13}} \xrightarrow{} \ \ldots$$

Obliczamy a_6. Układamy równanie $a_6 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot \left(-\sqrt{5}\right) = 25$, czyli $a_6 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^3 = 25$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je.

$a_6 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^3 = 25$

$a_6 \cdot \left(-5\sqrt{5}\right) = 25$

$-5\sqrt{5}\, a_6 = 25 \qquad |:(-5)$

$\sqrt{5}\, a_6 = -5 \qquad |:\sqrt{5}$

$a_6 = -\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$a_6 = -\dfrac{5}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \mathbf{-\sqrt{5}}$

Odrzucamy odpowiedzi A i B. Liczymy a_{12}.

$$\ldots\ \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{-\sqrt{5}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_8} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{25} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{10}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{11}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{12}} \xrightarrow{\cdot(-\sqrt{5})} \boxed{a_{13}} \xrightarrow{} \ \ldots$$

Układamy równanie $25 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot \left(-\sqrt{5}\right) = a_{12}$, czyli $25 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^3 = a_{12}$, wynikające z powyższego schematu i rozwiązujemy je.

$25 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^3 = a_{12}$

$25 \cdot \left(-5\sqrt{5}\right) = a_{12}$

$\mathbf{-125\sqrt{5}} = a_{12}$

Odp. **C**

13.21.

Z treści zadania wiadomo, że $a_6 \cdot a_8 = 72$.

Należy policzyć $a_3 \cdot a_{11}$.

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Wyrazy a_6 i a_8 rozpisujemy, korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$

$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = a_1 \cdot q^7$

Zatem:

$\underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^7}_{a_8} = 72$

$a_1 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot q^7 = 72$ (mnożenie jest przemienne)

$a_1^{\ 2} \cdot q^{12} = 72$.

Szukane wyrazy a_3 i a_{11} rozpisujemy, korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$

$a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1} = a_1 \cdot q^{10}$

Liczymy $a_3 \cdot a_{11} = a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^{10} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot q^{10} = a_1^{\ 2} \cdot q^{2+10} = \underbrace{a_1^{\ 2} \cdot q^{12}}_{72} = \mathbf{72}$.

Odp. **C**

13.22.

Rozwiązanie I:

Wyrażenie $a_1 \cdot a_{10}$ pojawia się w każdej z odpowiedzi.

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Rozpisujemy a_{10}, korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = a_1 \cdot q^9$

Zatem:

$$a_1 \cdot a_{10} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^9}_{a_{10}} = a_1^{\ 2} \cdot q^9.$$

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, rozpisujemy prawe strony równań podanych w odpowiedziach sprawdzając, czy wyrażenia są równe $a_1^{\ 2} \cdot q^9$.

A. $a_2 \cdot a_5 = \underbrace{a_1 \cdot q^{2-1}}_{a_2} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{5-1}}_{a_5} = a_1 \cdot q^1 \cdot a_1 \cdot q^4 = a_1^{\ 2} \cdot q^5$ → odrzucamy odp. A

B. $a_2 \cdot a_9 = \underbrace{a_1 \cdot q^{2-1}}_{a_2} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{9-1}}_{a_9} = a_1 \cdot q^1 \cdot a_1 \cdot q^8 = a_1^{\ 2} \cdot q^9$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Wystarczy rozważyć przykładowy, dowolny ciąg geometryczny o dodatnich wyrazach, np.:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...

Sprawdzamy prawdziwość równań przedstawionych w odpowiedziach:

A. $a_1 \cdot a_{10} = a_2 \cdot a_5$	B. $a_1 \cdot a_{10} = a_2 \cdot a_9$	C. $a_1 \cdot a_{10} = a_3 \cdot a_7$	D. $a_1 \cdot a_{10} = a_4 \cdot a_5$
$1 \cdot 1024 = 2 \cdot 16$	$1 \cdot 1024 = 2 \cdot 512$	$1 \cdot 1024 = 4 \cdot 64$	$1 \cdot 1024 = 8 \cdot 16$
$1024 = 32$	$\mathbf{1024 = 1024}$	$1024 = 256$	$1024 = 128$
fałsz	prawda	fałsz	fałsz

Jedynie w przypadku odp. **B**, podstawiając odpowiednie wyrazy ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... otrzymaliśmy prawdziwą równość. Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

13.23.

Rozpisujemy a_2 i a_6, korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q^1$

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$.

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Zatem:

$a_2 \cdot a_6 = 20$

$\underbrace{a_1 \cdot q^1}_{a_2} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6} = 20$

$a_1 \cdot a_1 \cdot q^1 \cdot q^5 = 20$ (mnożenie jest przemienne)

$a_1^{\ 2} \cdot q^6 = 20$

Rozpisujemy wyrażenie $a_3 \cdot a_5$:

$$a_3 \cdot a_5 = \underbrace{a_1 \cdot q^{3-1}}_{a_3} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{5-1}}_{a_5} = a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^4 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot q^4 = a_1^{\ 2} \cdot q^{2+4} = \underbrace{a_1^{\ 2} \cdot q^6}_{20} = \mathbf{20}.$$

Odp. **A**

13.24.

Rozpisujemy a_9 i a_{13}, korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} = a_1 \cdot q^8$

$a_{13} = a_1 \cdot q^{13-1} = a_1 \cdot q^{12}$.

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Zatem:

$a_9 \cdot a_{13} = 3$

$\underbrace{a_1 \cdot q^8}_{a_9} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{12}}_{a_{13}} = 3$

$a_1 \cdot a_1 \cdot q^8 \cdot q^{12} = 3$ (mnożenie jest przemienne)

$a_1^{\,2} \cdot q^{20} = 3$.

Rozpisujemy wyrażenie $(a_7 \cdot a_{15})^2$:

$$(a_7 \cdot a_{15})^2 = \left(\underbrace{a_1 \cdot q^{7-1}}_{a_7} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{15-1}}_{a_{15}}\right)^2 = (a_1 \cdot q^6 \cdot a_1 \cdot q^{14})^2 = (a_1 \cdot a_1 \cdot q^6 \cdot q^{14})^2 = \underbrace{(a_1^{\,2} \cdot q^{20})}_{3}{}^2 = 3^2 = \mathbf{9}.$$

Odp. **D**

13.25.

Z treści zadania wynika, że $a_6 \cdot a_8 = 7$. Należy obliczyć $a_2 \cdot a_{12}$.

Wyrazy a_6 i a_8 rozpisujemy, korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$

$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = a_1 \cdot q^7$

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Zatem:

$\underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^7}_{a_8} = 7$

$a_1 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot q^7 = 7$ (mnożenie jest przemienne)

$a_1^{\ 2} \cdot q^{12} = 7$.

Szukane wyrazy a_2 i a_{12} rozpisujemy, korzystając ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q^1$

$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = a_1 \cdot q^{11}$

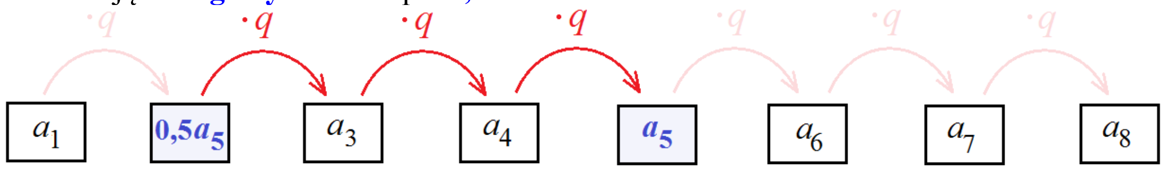
$a_2 \cdot a_{12} = \underbrace{a_1 \cdot q^1}_{a_2} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{11}}_{a_{12}} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^1 \cdot q^{11} = a_1^{\ 2} \cdot q^{1+11} = \underbrace{a_1^{\ 2} \cdot q^{12}}_{7} = \mathbf{7}$.

Odp. **A**

13.26.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $a_2 = 0{,}5a_5$. Uwzględniamy to w poniższym schemacie, zamieniając **drugi wyraz** na napis **0,5*a*5**:



Korzystając z powyższego schematu, tworzymy równanie $0{,}5a_5 \cdot q^3 = a_5$, które rozwiązujemy:

$0{,}5a_5 \cdot q^3 = a_5 \qquad |: a_5$

$0{,}5q^3 = 1 \qquad |: 0{,}5$

$q^3 = \frac{1}{0{,}5}$

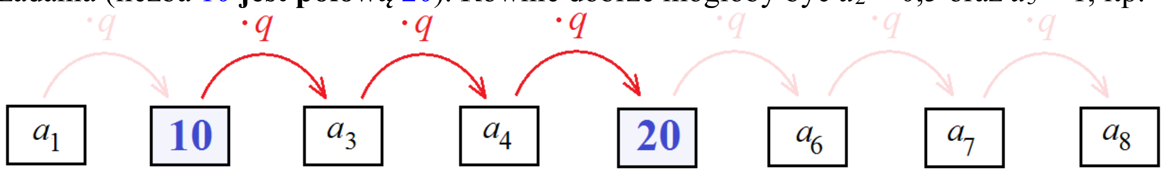
$q^3 = 2$

$q = \sqrt[3]{2}$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowe wartości wyrazów a_2 = **10** oraz a_5 = **20**, spełniające warunek zadania (liczba 10 **jest połową** 20). Równie dobrze mogłoby być $a_2 = 0{,}5$ oraz $a_5 = 1$, itp.



Korzystając z powyższego schematu, tworzymy równanie $10 \cdot q \cdot q \cdot q = 20$, czyli $10q^3 = 20$, które rozwiązujemy:

$10q^3 = 20 \qquad |: 10$

$q^3 = 2$

$q = \sqrt[3]{2}$

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

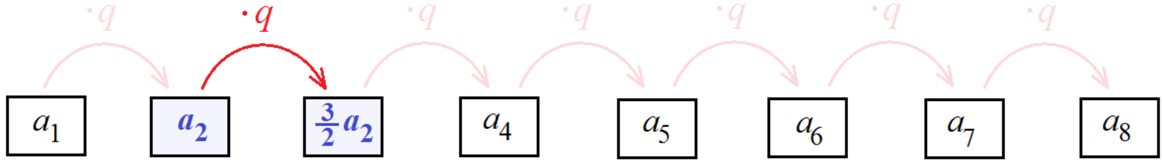
13.27.

Rozwiązanie I:

$2a_3 = 3a_2 \qquad |:2$

$a_3 = \frac{3}{2}a_2$

Równanie $a_3 = \frac{3}{2}a_2$ oznacza, że **trzeci wyraz** ciągu można zastąpić napisem $\frac{3}{2}a_2$ w poniższym schemacie:



Z powyższego schematu wynika, że $a_2 \cdot q = \frac{3}{2}a_2$. Dzieląc stronami przez a_2, „znikamy” a_2, otrzymując $q = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

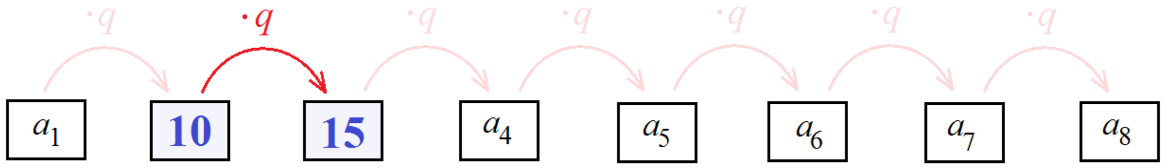
W równaniu $2a_3 = 3a_2$, wymyślamy wartość jednego z wyrazów (np. $\boldsymbol{a_2 = 10}$).

Podstawiamy wymyśloną wartość a_2 do równania $2a_3 = 3a_2$ i wyliczamy a_3.

$2a_3 = 3 \cdot 10$

$2a_3 = 30 \qquad |:2$

$\boldsymbol{a_3 = 15}$.



Z powyższego schematu wynika równanie $10 \cdot q = 15$, czyli $10q = 15$, które rozwiązujemy:

$10q = 15 \qquad |:10$

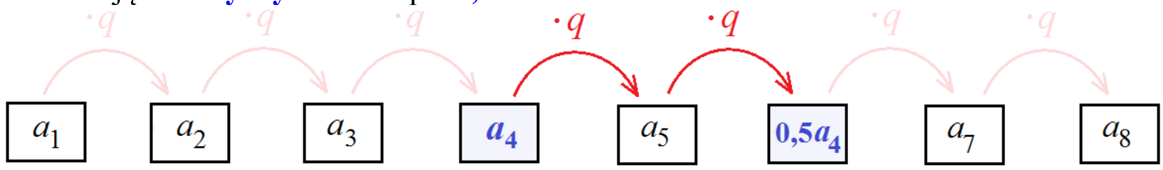
$q = \frac{15}{10}$

skracając przez 5, otrzymujemy $q = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$. Odp. **B** jest poprawna.

13.28.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $a_6 = 0{,}5a_4$. Uwzględniamy to w poniższym schemacie, zamieniając **szósty wyraz** na napis **0,5*a*4**:



Korzystając z powyższego schematu, tworzymy równanie $a_4 \cdot q^2 = 0{,}5a_4$, które rozwiązujemy:

$$a_4 \cdot q^2 = 0{,}5a_4 \qquad |: a_4$$

$$q^2 = 0{,}5$$

$$q^2 = \frac{1}{2}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{lub} \quad q = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

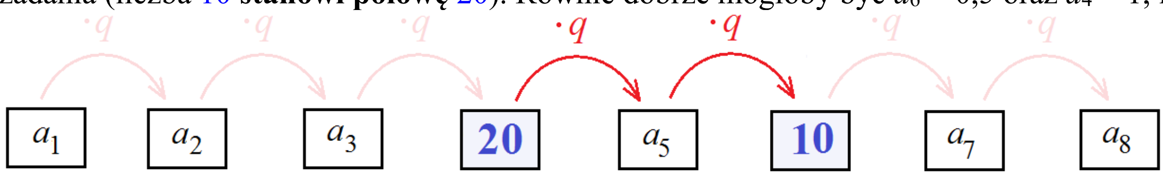
Ujemny wynik $q = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ odrzucamy, bo wówczas ciąg nie będzie ani rosnący, ani malejący.

Zatem $q = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \mathbf{0{,}5\sqrt{2}}$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowe wartości wyrazów a_6 = **10** oraz a_4 = **20**, spełniające warunek zadania (liczba 10 **stanowi połowę** 20). Równie dobrze mogłoby być $a_6 = 0{,}5$ oraz $a_4 = 1$, itp.



Korzystając z powyższego schematu, tworzymy równanie $20 \cdot q \cdot q = 10$, czyli $20q^2 = 10$, które rozwiązujemy:

$$20q^2 = 10 \qquad |: 20$$

$$q^2 = \frac{10}{20}$$

$$q^2 = 0{,}5$$

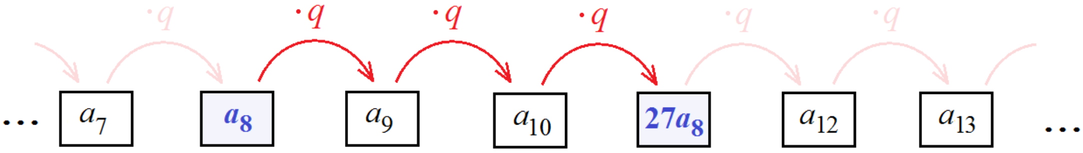
$$q = \sqrt{0{,}5} \approx \mathbf{0{,}707}$$

Przybliżamy wyniki przedstawione w odpowiedziach i oceniamy, który z nich jest najbliższy rezultatowi **0,707**.

A. $0{,}5$ B. $0{,}5\sqrt{2} \approx 0{,}5 \cdot 1{,}41 = \mathbf{0{,}705}$ C. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ D. 2

Wynik **0,705** z odp. **B** jest najbliższy liczbie **0,707**. Zatem odp. **B** jest prawidłowa.

13.29.
Rozwiązanie I:
$27a_8 - a_{11} = 0$ oznacza, że $27a_8 = a_{11}$, więc **jedenasty wyraz** zastępujemy **napisem 27*a*8**:



Na podstawie powyższego schematu układamy równanie $a_8 \cdot q \cdot q \cdot q = 27a_8$, czyli $a_8 \cdot q^3 = 27a_8$, które rozwiązujemy:

$a_8 \cdot q^3 = 27a_8 \quad |: a_8$

$q^3 = 27$

$q = \mathbf{3}$

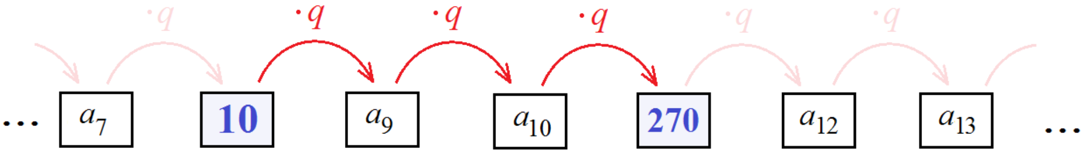
Odp. **A**

Rozwiązanie II:
W równaniu $27a_8 - a_{11} = 0$, wymyślamy wartość jednego z wyrazów (np. ***a*8 = 10**).
Podstawiamy wymyśloną wartość a_8 do równania $27a_8 - a_{11} = 0$ i wyliczamy a_{11}.

$27 \cdot 10 - a_{11} = 0$

$270 - a_{11} = 0$

***a*11 = 270**



Z powyższego schematu wynika równanie $10 \cdot q \cdot q \cdot q = 270$, czyli $10q^3 = 270$, które rozwiązujemy:

$10q^3 = 270 \quad |:10$

$q^3 = 27$

$q = \mathbf{3}$

Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

13.30.

Rozwiązanie I:

Zadanie polega na wskazaniu zależności pomiędzy a_1 i a_3, znając iloraz ciągu.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \boxed{a_8} \ \ldots$$

Z powyższego schematu wynika równanie $a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = a_3$, czyli $a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = a_3$.

$$a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = a_3$$

$$a_1 \cdot \frac{4}{9} = a_3$$

$$\frac{4}{9} a_1 = a_3$$

Ponieważ a_3 jest równe $\frac{4}{9} a_1$, odrzucamy odp. A i B.

Z równania $\frac{4}{9} a_1 = a_3$ wyznaczamy a_1.

$$\frac{4}{9} a_1 = a_3 \qquad | \cdot 9$$

$$\mathbf{9} \cdot \frac{4}{9} a_1 = \mathbf{9} \cdot a_3$$

$$4a_1 = 9a_3 \qquad |:4$$

$$a_1 = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} a_3$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Wykorzystujemy wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego w celu rozpisania a_3.

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

Podstawiamy $q = -\frac{2}{3}$, zatem:

$a_3 = a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = a_1 \cdot \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{9}{4} a_1$, więc odrzucamy odp. A i B.

$a_3 = \frac{9}{4} a_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{4}{9} a_3$. Oznacza to, że odp. **C** jest prawidłowa.

13.31.
Korzystamy z twierdzenia w ramce obok dla:
$a = 72,\ \ b = -24,\ \ \ c = -4 - x.$

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Zatem:

$(-24)^2 = 72 \cdot (-4 - x)$

$576 = -288 - 72x$

$72x = -288 - 576$

$72x = -864 \qquad\qquad |:72$

$x = \mathbf{-12}$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:
Podstawiamy w miejsce ***x*** proponowane wartości liczbowe z odpowiedzi i dopiero potem sprawdzamy wzorem $b^2 = a \cdot c$, czy powstały ciąg (a, b, c) jest geometryczny:

A. ***x* = 12**

$(72, -24, -4 - \mathbf{12})$

$(72, -24, -16)$

$a = 72, b = -24, c = -16$

$b^2 = a \cdot c$

$(-24)^2 = 72 \cdot (-16)$

$576 = -1152$

równość fałszywa

B. ***x* = 124**

$(72, -24, -4 - \mathbf{124})$

$(72, -24, -128)$

$a = 72, b = -24, c = -128$

$b^2 = a \cdot c$

$(-24)^2 = 72 \cdot (-128)$

$576 = -9216$

równość fałszywa

C. ***x* = –12**

$(72, -24, -4 - (-\mathbf{12}))$

$(72, -24, -4 + 12)$

$(72, -24, 8)$

$b^2 = a \cdot c$

$(-24)^2 = 72 \cdot 8$

$\mathbf{576 = 576}$

równość **prawdziwa**

D. ***x* = 116**

$(72, -24, -4 - \mathbf{116})$

$(72, -24, -120)$

$a = 72, b = -24, c = -120$

$b^2 = a \cdot c$

$(-24)^2 = 72 \cdot (-120)$

$576 = -8640$

równość fałszywa

Jedynie w przypadku odp. **C** uzyskaliśmy prawdziwą równość. Zatem odp. **C** jest poprawna.

13.32.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z twierdzenia w ramce obok dla:

$a = -9,\ \ b = -6,\ \ \ c = x - 1.$

> Ciąg (a, b, c) jest geometryczny,
> gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Zatem:

$(-6)^2 = -9 \cdot (x-1)$

$36 = -9x + 9$

$9x = 9 - 36$

$9x = -27 \qquad |:9$

$x = \mathbf{-3}$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy w miejsce $\boldsymbol{x}$ proponowane wartości liczbowe z odpowiedzi i dopiero potem sprawdzamy wzorem $b^2 = a \cdot c$, czy powstały ciąg $(a,\ b,\ c)$ jest geometryczny:

A. $\boldsymbol{x = -3}$

$(-9,\ -6,\ -\mathbf{3}-1)$

$(-9,\ -6,\ -4)$

$b^2 = a \cdot c$

$(-6)^2 = (-9)\cdot(-4)$

$\mathbf{36 = 36}$

B. $\boldsymbol{x = -2}$

$(-9,\ -6,\ -\mathbf{2}-1)$

$(-9,\ -6,\ -3)$

$b^2 = a \cdot c$

$(-6)^2 = (-9)\cdot(-3)$

$36 = 27$

C. $\boldsymbol{x = 3}$

$(-9,\ -6,\ \mathbf{3}-1)$

$(-9,\ -6,\ 2)$

$b^2 = a \cdot c$

$(-6)^2 = (-9)\cdot 2$

$36 = -18$

D. $\boldsymbol{x = 2}$

$(-9,\ -6,\ \mathbf{2}-1)$

$(-9,\ -6,\ 1)$

$b^2 = a \cdot c$

$(-6)^2 = (-9)\cdot 1$

$36 = -9$

Jedynie w przypadku odp. **A** uzyskaliśmy prawdziwą równość. Zatem odp. **A** jest poprawna.

13.33.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z twierdzenia w ramce obok dla:

$a = 3x$, $b = 6$, $c = -12$.

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Zatem:

$6^2 = 3x \cdot (-12)$

$36 = -36x$

$36x + 36 = 0$

$36x = -36 \qquad |:36$

$x = \mathbf{-1}$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy w miejsce $\boldsymbol{x}$ proponowane wartości liczbowe z odpowiedzi i dopiero potem sprawdzamy wzorem $b^2 = a \cdot c$, czy powstały ciąg (a, b, c) jest geometryczny:

A. $\boldsymbol{x = -3}$	B. $\boldsymbol{x = -1}$	C. $\boldsymbol{x = 1}$	D. $\boldsymbol{x = -4}$
$(3 \cdot (-\mathbf{3}), 6, -12)$	$(3 \cdot (-\mathbf{1}), 6, -12)$	$(3 \cdot \mathbf{1}, 6, -12)$	$(3 \cdot (-\mathbf{4}), 6, -12)$
$(-9, 6, -12)$	$(-3, 6, -12)$	$(3, 6, -12)$	$(-12, 6, -12)$
$b^2 = a \cdot c$	$b^2 = a \cdot c$	$b^2 = a \cdot c$	$b^2 = a \cdot c$
$6^2 = (-9) \cdot (-12)$	$6^2 = (-3) \cdot (-12)$	$6^2 = 3 \cdot (-12)$	$6^2 = (-12) \cdot (-12)$
$36 = 108$	$\mathbf{36 = 36}$	$36 = -36$	$36 = 144$

Jedynie w przypadku odp. **B** uzyskaliśmy prawdziwą równość. Zatem odp. **B** jest poprawna.

13.34.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z twierdzenia w ramce obok dla:

$x = 2020, \ y = 202, \ \ z = a - 2.$

Ciąg (x, y, z) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{y^2 = x \cdot z}$

Zatem:

$202^2 = 2020 \cdot (a - 2)$

$40804 = 2020a - 4040$

$-2020a = -4040 - 40804$

$-2020a = -44844 \qquad |:(-2020)$

$a = \dfrac{-44844}{-2020} = \dfrac{44844}{2020} = \mathbf{22{,}2}$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy w miejsce ***a*** proponowane wartości liczbowe z odpowiedzi i dopiero potem sprawdzamy wzorem $y^2 = x \cdot z$, czy powstały ciąg $(x, \ y, \ z)$ jest geometryczny:

A. ***a*** **= 22,2**

$(2020, \ 202, \ \mathbf{22{,}2} - 2)$

$(2020; \ 202; \ 20{,}2)$

$x = 2020, \ y = 202, \ z = 20{,}2$

$y^2 = x \cdot z$

$202^2 = 2020 \cdot 20{,}2$

$\mathbf{40804} = \mathbf{40804}$

B. ***a*** **= 18,2**

$(2020, \ 202, \ \mathbf{18{,}2} - 2)$

$(2020; \ 202; \ 16{,}2)$

$x = 2020, \ y = 202, \ z = 16{,}2$

$y^2 = x \cdot z$

$202^2 = 2020 \cdot 16{,}2$

$40804 = 32724$

C. ***a*** **= –1614**

$(2020, \ 202, \ -\mathbf{1614} - 2)$

$(2020; \ 202; \ -1616)$

$x = 2020, \ y = 202, \ z = -1616$

$y^2 = x \cdot z$

$202^2 = 2020 \cdot (-1616)$

$40804 = -3264320$

D. ***a*** **= –1618**

$(2020, \ 202, \ -\mathbf{1618} - 2)$

$(2020; \ 202; \ -1620)$

$x = 2020, \ y = 202, \ z = -1620$

$y^2 = x \cdot z$

$202^2 = 2020 \cdot (-1620)$

$40804 = -3272400$

Jedynie w przypadku odp. **A** uzyskaliśmy prawdziwą równość. Zatem odp. **A** jest poprawna.

13.35.
Rozwiązanie I:
Korzystamy z twierdzenia w ramce obok dla:

$x = \frac{1}{a}, \ y = 1, \ \ z = 2.$

Ciąg (x, y, z) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{y^2 = x \cdot z}$

Zatem:

$1^2 = \frac{1}{a} \cdot 2$

$1 = \frac{2}{a} \qquad |\cdot a$

$a = \mathbf{2}$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:
Podstawiamy w miejsce ***a*** proponowane wartości liczbowe z odpowiedzi i dopiero potem sprawdzamy wzorem $y^2 = x \cdot z$, czy powstały ciąg $(x, \ y, \ z)$ jest geometryczny:

A. ***a* = 2**	B. ***a* = 0,5**	C. ***a* = 0**	D. ***a* = –1**
$\left(\frac{1}{\mathbf{2}}, 1, 2\right)$ $x = \frac{1}{2}, \ y = 1, \ z = 2$ $y^2 = x \cdot z$ $1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2$ $\mathbf{1 = 1}$	$\left(\frac{1}{\mathbf{0{,}5}}, 1, 2\right)$ $(2, \ 1, \ 2)$ $x = 2, \ y = 1, \ z = 2$ $y^2 = x \cdot z$ $1^2 = 2 \cdot 2$ $1 = 4$	$\left(\frac{1}{\mathbf{0}}, 1, 2\right)$ sprzeczność – dzielenie przez zero	$\left(\frac{1}{\mathbf{-1}}, 1, 2\right)$ $(-1, \ 1, \ 2)$ $x = -1, \ y = 1, \ z = 2$ $y^2 = x \cdot z$ $1^2 = (-1) \cdot 2$ $1 = -2$

Jedynie w przypadku odp. **A** otrzymaliśmy prawdziwą równość.
Oznacza to, że odp. **A** jest prawidłowa.

13.36.

Rozwiązanie I:

Obliczamy a_1, podstawiając liczbę 1 w miejsce n we wzorze $a_n = -9 \cdot 3^{1-n} \cdot (-1)^n$.

$a_{\mathbf{1}} = -9 \cdot 3^{\mathbf{1}-\mathbf{1}} \cdot (-1)^{\mathbf{1}} = -9 \cdot 3^0 \cdot (-1) = -9 \cdot 1 \cdot (-1) = \mathbf{9}$. Zatem odrzucamy odpowiedzi A i B.

Obliczamy a_5, podstawiając liczbę 5 w miejsce n we wzorze ciągu.

$a_{\mathbf{5}} = -9 \cdot 3^{1-\mathbf{5}} \cdot (-1)^{\mathbf{5}} = -9 \cdot 3^{-4} \cdot (-1) = -9 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot (-1) = -9 \cdot \frac{1}{81} \cdot (-1) = \frac{9}{81} = \mathbf{\frac{1}{9}}$.

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Liczbę $\mathbf{3^{-4}}$ można policzyć też na kalkulatorze: $\boxed{3}\boxed{\div}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$.

Wówczas otrzymamy $3^{-4} \approx \mathbf{0{,}0123}$, więc

$a_{\mathbf{5}} = -9 \cdot 3^{1-\mathbf{5}} \cdot (-1)^{\mathbf{5}} = -9 \cdot 3^{-4} \cdot (-1) \approx -9 \cdot \mathbf{0{,}0123} \cdot (-1) = \mathbf{0{,}1107}$.

Wśród odpowiedzi, liczba $a_5 = \frac{1}{9} = \mathbf{0{,}1111}...$ jest najbardziej zbliżona do wyniku **0,1107**.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.37.

Rozwiązanie I:

Obliczamy a_4, podstawiając liczbę 4 w miejsce n we wzorze $a_n = 3 \cdot 2^{-n}$.

$$a_4 = 3 \cdot 2^{-4} = 3 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} = \mathbf{0{,}1875}.$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Liczbę $\mathbf{2^{-4}}$ można policzyć też na kalkulatorze: $\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$.

Wówczas otrzymamy $2^{-4} = \mathbf{0{,}0625}$, więc $a_4 = 3 \cdot 2^{-4} = 3 \cdot \mathbf{0{,}0625} = \mathbf{0{,}1875}$.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.38.

Rozwiązanie I:

Obliczamy a_4, podstawiając liczbę 4 w miejsce n we wzorze $a_n = 8^{5-2n}$.

$$a_4 = 8^{5-2\cdot 4} = 8^{5-8} = 8^{-3} = (\underbrace{2^3}_{8})^{-3} = 2^{3\cdot(-3)} = 2^{-9} = \left(\frac{2}{1}\right)^{-9} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{9}}.$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

$a_4 = 8^{5-2\cdot 4} = 8^{5-8} = 8^{-3} \approx$ **0,0019531**. Liczbę 8^{-3} liczymy kalkulatorem: $\boxed{8}\boxed{\div}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$

Wyniki przedstawione w odpowiedziach obliczamy kalkulatorem i oceniamy, który z nich jest najbliżej rezultatu **0,0019531**.

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-27}$

$\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{27 \text{ razy}}$

wynik: ponad **100 milionów**

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-9}$

$\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{9 \text{ razy}}$

wynik: **512**

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$

$\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\times}\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{8 \text{ razy}}$

wynik: **0,0019531**

D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{27}$

$\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\times}\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{26 \text{ razy}}$

wynik: **0**

Okazuje się, że wynik z odp. **C** zgadza się z obliczeniem 8^{-3} które przeprowadzono wcześniej. Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.39.

Rozwiązanie I:

Obliczamy a_1, podstawiając liczbę 1 w miejsce n we wzorze $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{3n-5}$.

$$a_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{3\cdot 1-5} = \left(\sqrt{2}\right)^{3-5} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

We wzorze ciągu oraz w odpowiedziach korzystamy z przybliżenia $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$ oraz $\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$.

Wówczas $a_n = \mathbf{1{,}41}^{3n-5}$ oraz liczby w odpowiedziach:

A. $a_1 = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$ B. $a_1 = -2\sqrt{2} \approx -2\cdot 1{,}41 = \mathbf{-2{,}82}$ C. $a_3 = \mathbf{2}$ D. $a_3 = 4\sqrt{2} \approx 4\cdot 1{,}41 = \mathbf{5{,}64}$

Następnie – z pomocą kalkulatora – ze wzoru $a_n = \mathbf{1{,}41}^{3n-5}$ obliczamy wartości $\boldsymbol{a_1}$ oraz $\boldsymbol{a_3}$:

$a_1 = 1{,}41^{3\cdot 1-5} = 1{,}41^{3-5} = \mathbf{1{,}41^{-2}}$.

1	,	4	1	÷	=	=

wynik: **0,5029927**

$a_3 = 1{,}41^{3\cdot 3-5} = 1{,}41^{9-5} = \mathbf{1{,}41^{4}}$.

1	,	4	1	×	=	=	=

wynik: **3,9525416**

Okazuje się, że wynik a_1 = **0,5029927** jest najbliżej wyniku a_1 = **0,5**.
Zatem odp. **A** jest poprawna.

13.40.
Rozwiązanie I:
Obliczamy a_2, podstawiając liczbę 2 w miejsce n we wzorze $a_n = -(-1)^n \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-n}$.

$$a_2 = -\underbrace{(-1)^2}_{1} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:
We wzorze ciągu oraz w odpowiedziach korzystamy z przybliżenia $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$.
Wszystkie odpowiedzi przedstawiamy w postaci ułamków dziesiętnych.

$$a_n = -(-1)^n \cdot \mathbf{1{,}73}^{-n}$$

A. $-\frac{1}{3} \approx \mathbf{-0{,}33}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{9} \approx -\frac{1{,}73}{9} \approx \mathbf{-0{,}192}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1{,}73}{3} \approx \mathbf{0{,}577}$ D. $\frac{1}{3} \approx \mathbf{0{,}33}$

Obliczamy $\boldsymbol{a_2}$ ze wzoru $a_n = -(-1)^n \cdot \mathbf{1{,}73}^{-n}$ z pomocą kalkulatora:

$$a_2 = -\underbrace{(-1)^2}_{1} \cdot \mathbf{1{,}73}^{-2} = -1 \cdot 1{,}73^{-2} = -1 \cdot 0{,}334 = \mathbf{-0{,}334}.$$

Obliczenie **1,73**$^{-2}$ na kalkulatorze:

1	,	7	3	÷	=	=

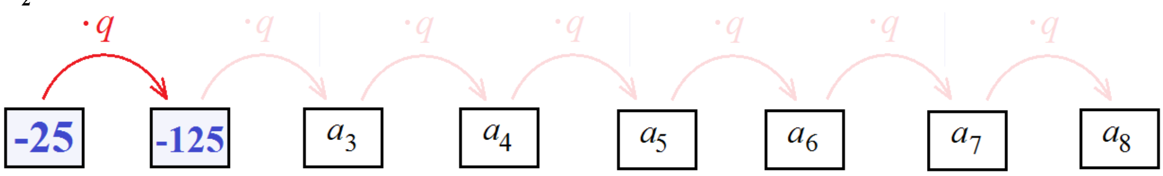
Najbliżej rezultatu **–0,334** jest odp. **A**, czyli **–0,33**. Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

13.41.

Obliczamy najpierw $\boldsymbol{a_1}$ i $\boldsymbol{a_2}$:

$a_1 = -5^{1+1} = -5^2 = \mathbf{-25}$

$a_2 = -5^{2+1} = -5^3 = \mathbf{-125}$



Znając dwa początkowe wyrazy ciągu, tworzymy równanie $-25 \cdot q = -125$, czyli $-25q = -125$, wynikające z powyższego schematu:

$-25q = -125 \qquad |:(-1)$

$25q = 125 \qquad |:25$

$\boldsymbol{q = 5}$

Odp. **C**

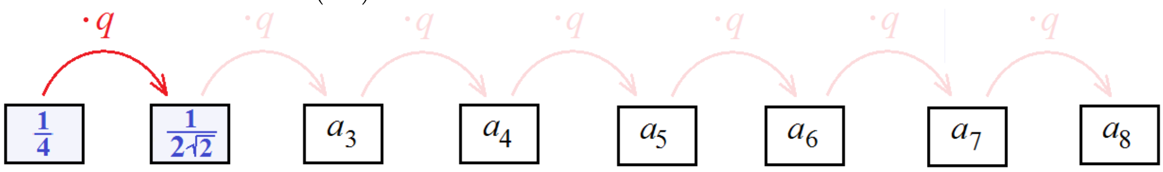
13.42.

Rozwiązanie I:

Obliczamy najpierw $\boldsymbol{a_1}$ i $\boldsymbol{a_2}$:

$$a_1=\left(\sqrt{2}\right)^{1-5}=\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4}=\frac{1}{\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^2}=\frac{1}{2^2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$a_2=\left(\sqrt{2}\right)^{2-5}=\left(\sqrt{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$



Znając dwa początkowe wyrazy ciągu, tworzymy równanie $\frac{1}{4}\cdot q=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, czyli $\frac{q}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, wynikające z powyższego schematu:

$\frac{q}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ mnożymy równanie „na krzyż”

$2\sqrt{2}\,q=4 \qquad |:2\sqrt{2}$

$$q=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\sqrt{2}}$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

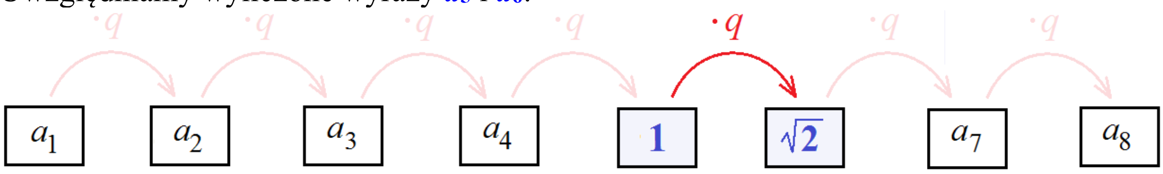
Nie musimy za wszelką cenę **wyliczać** pary **początkowych** wyrazów a_1, a_2 aby obliczyć $\boldsymbol{q}$.

W tym zadaniu wygodnie jest wyliczyć parę a_5, a_6.

$a_5=\left(\sqrt{2}\right)^{5-5}=\left(\sqrt{2}\right)^0=\mathbf{1}$ (każda liczba różna od zera, podniesiona do potęgi 0 jest równa 1)

$a_6=\left(\sqrt{2}\right)^{6-5}=\left(\sqrt{2}\right)^1=\mathbf{\sqrt{2}}$.

Uwzględniamy wyliczone wyrazy $\boldsymbol{a_5}$ i $\boldsymbol{a_6}$:



Z powyższego schematu wynika równanie $1\cdot q=\sqrt{2}$, czyli $q=\mathbf{\sqrt{2}}$.

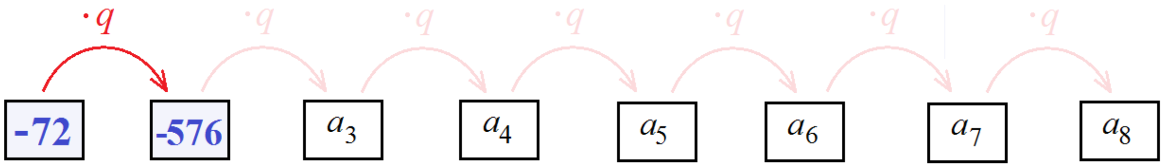
Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.43.

Obliczamy najpierw $\boldsymbol{a_1}$ i $\boldsymbol{a_2}$:

$a_1 = -9 \cdot 2^{3\cdot 1} = -9 \cdot 2^3 = -9 \cdot 8 = \mathbf{-72}$

$a_2 = -9 \cdot 2^{3\cdot 2} = -9 \cdot 2^6 = -9 \cdot 64 = \mathbf{-576}$



Z powyższego schematu wynika równanie $-72 \cdot q = -576$, czyli $-72q = -576$, które rozwiązujemy:

$-72q = -576 \quad |:(-1)$

$72q = 576 \quad |:72$

$q = \mathbf{8}$

Odp. **D**

13.44.

W każdym z podanych w odpowiedziach ciągów liczymy pierwszy i drugi wyraz.
Gwarancją ujemnego ilorazu $\boldsymbol{q}$ są **przeciwne znaki** dwóch sąsiednich wyrazów ciągu.

A. $a_n = 2^{-n}$	B. $b_n = -2^n$	C. $c_n = -2^{-n}$	D. $d_n = (-2)^n$
$a_1 = 2^{-1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	$b_1 = -2^1 = \mathbf{-2}$	$c_1 = -2^{-1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$	$d_1 = (-2)^1 = \mathbf{-2}$
$a_2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$	$b_2 = -2^2 = \mathbf{-4}$	$c_2 = -2^{-2} = -\mathbf{\frac{1}{4}}$	$d_2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$

Tylko w przypadku ciągu $d_n = (-2)^n$, dwa początkowe wyrazy $d_1 = \mathbf{-2}$, $d_2 = \mathbf{4}$, mają **przeciwne znaki**.

Odp. **D**

13.45.
Dla każdego z dwóch ciągów liczymy pierwszy i drugi wyraz.
Gwarancją ujemnego ilorazu $\boldsymbol{q}$ są **przeciwne znaki** dwóch sąsiednich wyrazów ciągu.

$a_n = (-1)^n \cdot 5^{-n}$

$a_1 = (-1)^1 \cdot 5^{-1} = (-1) \cdot \frac{1}{5} = -\mathbf{\frac{1}{5}}$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 5^{-2} = 1 \cdot \frac{1}{5^2} = \mathbf{\frac{1}{25}}$

$b_n = -5^{-n}$

$b_1 = -5^{-1} = -\mathbf{\frac{1}{5}}$

$b_2 = -5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\mathbf{\frac{1}{25}}$

Jedynie w przypadku ciągu $a_n = (-1)^n \cdot 5^{-n}$ uzyskaliśmy dwa sąsiednie wyrazy a_1 i a_2, które mają **przeciwne znaki**.

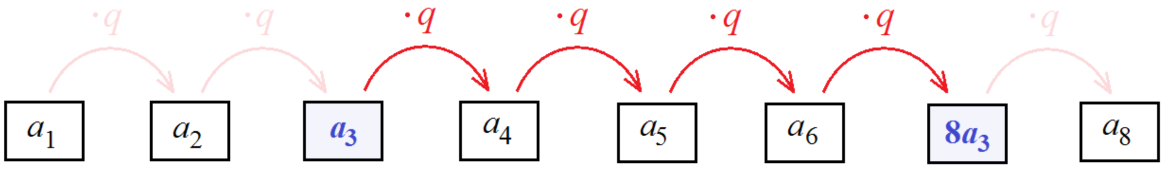
Odp. **A**

13.46.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $\frac{a_3}{a_7} = \frac{1}{8}$. Mnożąc „na krzyż”, otrzymujemy $a_7 = 8a_3$.

Równanie $a_7 = 8a_3$ oznacza, że $\boldsymbol{a_7}$ można **zastąpić napisem $\boldsymbol{8a_3}$**:



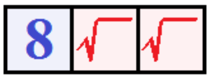
Z powyższego schematu wynika równanie $a_3 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 8a_3$, czyli $a_3 \cdot q^4 = 8a_3$, które rozwiązujemy:

$a_3 \cdot q^4 = 8a_3 \qquad |: a_3$

$q^4 = 8$

$q = \sqrt[4]{8}$ lub $q = -\sqrt[4]{8}$

Ujemne $q = -\sqrt[4]{8}$ odrzucamy, bo wtedy ciąg będzie miał wyrazy o przeciwnych znakach (ma mieć same dodatnie).

Zatem $q = \sqrt[4]{8}$. Obliczamy tę liczbę za pomocą kalkulatora: .

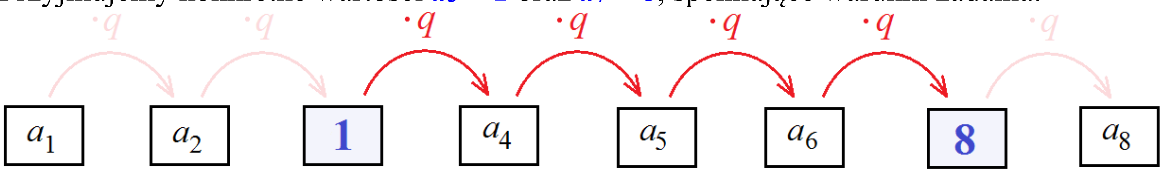
Otrzymujemy rezultat **1,6817928...** .

Oznacza to, że $q = \sqrt[4]{8}$ jest liczbą **niewymierną** (rozwinięcie nieskończone, nieokresowe).

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Przyjmujemy konkretne wartości $\boldsymbol{a_3 = 1}$ oraz $\boldsymbol{a_7 = 8}$, spełniające warunki zadania.



Z powyższego schematu wynika równanie $1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 8$, czyli $q^4 = 8$, które rozwiązujemy:

$q^4 = 8$

$q = \sqrt[4]{8}$ lub $q = -\sqrt[4]{8}$

Ujemne $q = -\sqrt[4]{8}$ odrzucamy, bo wtedy ciąg będzie miał wyrazy o przeciwnych znakach (ma mieć same dodatnie).

Zatem $q = \sqrt[4]{8}$. Obliczamy tę liczbę za pomocą kalkulatora: .

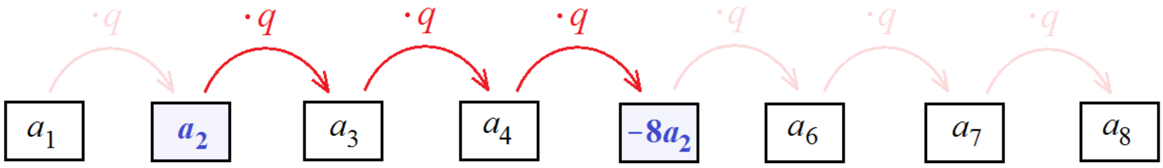
Otrzymujemy wynik **1,6817928...** (liczbę niewymierną, większą od 1). Odp. **C** jest poprawna.

13.47.

Rozwiązanie I:

Mnożąc równanie $\frac{a_5}{a_2} = -8$ stronami przez ***a*₂**, otrzymujemy $a_5 = -8a_2$.

Równanie $a_5 = -8a_2$ oznacza, że $\boldsymbol{a_5}$ można **zastąpić napisem** $\boldsymbol{-8a_2}$:



Z powyższego schematu wynika równanie $a_2 \cdot q \cdot q \cdot q = -8a_2$, czyli $a_2 \cdot q^3 = -8a_2$, które rozwiązujemy:

$a_2 \cdot q^3 = -8a_2 \qquad |: a_2$

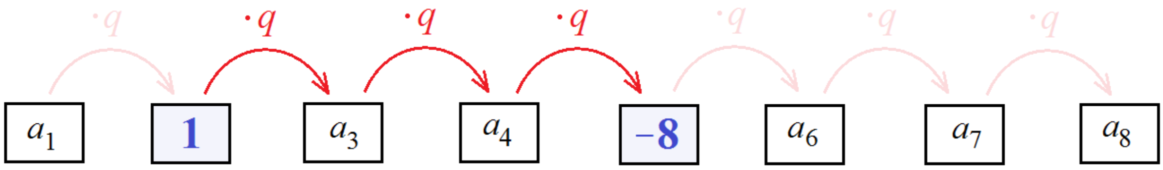
$q^3 = -8$

$q = \mathbf{-2}$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Warunek $\frac{a_5}{a_2} = -8$ będzie spełniony, gdy przyjmiemy np. $\boldsymbol{a_5} = \mathbf{-8}$ oraz $\boldsymbol{a_2} = \mathbf{1}$.



Z powyższego schematu wynika równanie $1 \cdot q \cdot q \cdot q = -8$, czyli $q^3 = -8$, które rozwiązujemy:

$q^3 = -8 \qquad |\sqrt[3]{\ }$

$q = \mathbf{-2}$

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.48.
Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $\frac{a_5}{a_2} = \frac{8}{27}$.

Mnożąc „na krzyż”, otrzymujemy $27a_5 = 8a_2$.

Dzieląc stronami przez 27, mamy $a_5 = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}a_2$.

Równanie $a_5 = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}a_2$ oznacza, że ***a*₅** można **zastąpić** napisem $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}\boldsymbol{a_2}$.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{\tfrac{8}{27}a_2} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Z powyższego schematu wynika równanie $a_2 \cdot q \cdot q \cdot q = \frac{8}{27}a_2$, czyli $a_2 \cdot q^3 = \frac{8}{27}a_2$, które rozwiązujemy:

$$a_2 \cdot q^3 = \frac{8}{27}a_2 \qquad |:a_2$$

$$q^3 = \frac{8}{27} \qquad |\sqrt[3]{\ }$$

$$q = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:
Ze względu na warunek $a_5 : a_2 = 8:27$, przyjmujemy $\boldsymbol{a_5 = 8}$ oraz $\boldsymbol{a_2 = 27}$.

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{27} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{8} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot q} \boxed{a_8}$$

Z powyższego schematu wynika równanie $27 \cdot q \cdot q \cdot q = 8$, czyli $27q^3 = 8$, które rozwiązujemy:

$$27q^3 = 8 \qquad |:27$$

$$q^3 = \frac{8}{27} \qquad |\sqrt[3]{\ }$$

$$q = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

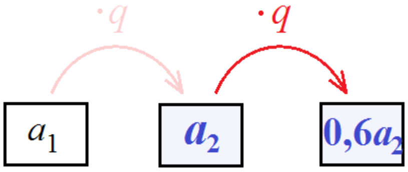
13.49.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $\frac{a_2}{a_3} = \frac{5}{3}$.

Mnożąc „na krzyż”, otrzymujemy $5a_3 = 3a_2$.

Dzieląc stronami przez 5, mamy $a_3 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}a_2$, czyli $\boldsymbol{a_3 = 0{,}6a_2}$.



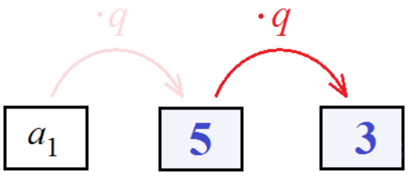
Równanie $\boldsymbol{a_3 = 0{,}6a_2}$ oznacza, że
$\boldsymbol{a_3}$ można **zastąpić** napisem $\boldsymbol{0{,}6a_2}$.

Ze schematu widocznego obok wynika równanie
$a_2 \cdot q = 0{,}6a_2$.
Dzieląc stronami przez a_2, otrzymujemy $\boldsymbol{q = 0{,}6}$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy np. $\boldsymbol{a_2 = 5}$ oraz $\boldsymbol{a_3 = 3}$, aby warunek zadania był spełniony.



Ze schematu widocznego obok wynika równanie
$5 \cdot q = 3$, czyli $5q = 3$, więc $\boldsymbol{q} = \frac{3}{5} = \mathbf{0{,}6}$.

Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

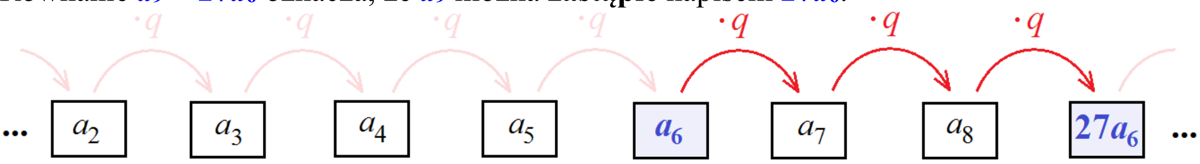
13.50.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że $\frac{a_6}{a_9} = \frac{1}{27}$.

Mnożąc „na krzyż”, otrzymujemy $a_9 = 27a_6$.

Równanie $\boldsymbol{a_9 = 27a_6}$ oznacza, że $\boldsymbol{a_9}$ można **zastąpić** napisem $\boldsymbol{27a_6}$.



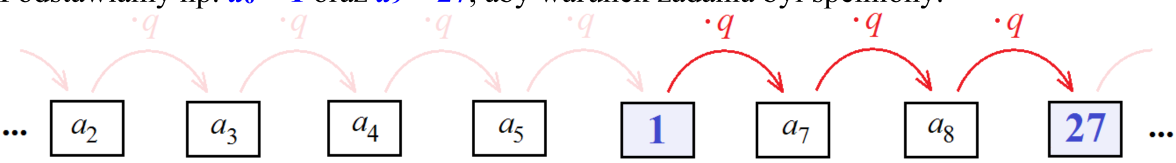
Z powyższego schematu wynika równanie $a_6 \cdot q \cdot q \cdot q = 27a_6$, czyli $a_6 \cdot q^3 = 27a_6$.

Dzieląc stronami przez a_6, otrzymujemy $q^3 = 27$, czyli $\boldsymbol{q = 3}$.

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy np. $\boldsymbol{a_6 = 1}$ oraz $\boldsymbol{a_9 = 27}$, aby warunek zadania był spełniony.



Z powyższego schematu wynika równanie $1 \cdot q \cdot q \cdot q = 27$, czyli $q^3 = 27$, więc $\boldsymbol{q = 3}$.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.51.

Dla $a = x$, $b = 1 - 4x$, $c = x + 3$ korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok.

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$(1-4x)^2 = x \cdot (x+3)$ → po lewej stronie **wzór skróconego mnożenia** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4x + (4x)^2 = x^2 + 3x$

$1 - 8x + 16x^2 = x^2 + 3x$ → przerzucamy wszystko na lewą stronę (równanie kwadratowe)

$1 - 8x + 16x^2 - x^2 - 3x = 0$

$15x^2 - 11x + 1 = 0$

$a_* = 15$, $b_* = -11$, $c_* = 1$, $-b_* = 11$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 1 = 121 - 60 = \mathbf{61}$.

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa różne** rozwiązania.

Oznacza to, że istnieją **dwie liczby** rzeczywiste $\boldsymbol{x}$ spełniające warunek ciągu geometrycznego.

Odp. **C**

Uwaga! *W książce w odpowiedziach jest* ***B****. Niestety, zdarzył się błąd w książce.*
Autor oraz Wydawnictwo Aksjomat przepraszają za zaistniałą pomyłkę.

13.52.

Rozwiązanie I:

Dla $a = 3$, $b = 1 + x$, $c = 27$
korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$(1+x)^2 = 3 \cdot 27$ → po lewej stronie **wzór skróconego mnożenia** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = 81$

$1 + 2x + x^2 = 81$ → przerzucamy wszystko na lewą stronę (równanie kwadratowe)

$1 + 2x + x^2 - 81 = 0$

$x^2 + 2x - 80 = 0$

$a_* = 1,\ b_* = 2,\quad c_* = -80,\qquad -b_* = -2$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80) = 4 + 320 = 324$

$\sqrt{\Delta} = 18$

$x_1 = \dfrac{-2-18}{2 \cdot 1} = \dfrac{-20}{2} = \mathbf{-10},\qquad x_2 = \dfrac{-2+18}{2 \cdot 1} = \dfrac{16}{2} = \mathbf{8}$

Jednym z rozwiązań równania jest liczba $\boldsymbol{x = -10}$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

W miejsce $\boldsymbol{x}$ podstawiamy każdą z proponowanych w odpowiedziach wartości i **dopiero później** sprawdzamy wzorem $b^2 = a \cdot c$, czy powstały ciąg $(a;\ b;\ c)$ jest geometryczny:

A. $\boldsymbol{x = -10}$	B. $\boldsymbol{x = -8}$	C. $\boldsymbol{x = 14}$	D. $\boldsymbol{x = 16}$
$(3;\ 1+(-\mathbf{10});\ 27)$	$(3;\ 1+(-\mathbf{8});\ 27)$	$(3;\ 1+\mathbf{14};\ 27)$	$(3;\ 1+\mathbf{16};\ 27)$
$(3;\ 1-10;\ 27)$	$(3;\ 1-8;\ 27)$	$(3;\ 15;\ 27)$	$(3;\ 17;\ 27)$
$(3;\ -9;\ 27)$	$(3;\ -7;\ 27)$	$a = 3, b = 15, c = 27$	$a = 3, b = 17, c = 27$
$a = 3, b = -9, c = 27$	$a = 3, b = -7, c = 27$	$b^2 = a \cdot c$	$b^2 = a \cdot c$
$b^2 = a \cdot c$	$b^2 = a \cdot c$	$15^2 = 3 \cdot 27$	$17^2 = 3 \cdot 27$
$(-9)^2 = 3 \cdot 27$	$(-7)^2 = 3 \cdot 27$	$\mathbf{225 = 81}$	$\mathbf{289 = 81}$
$\mathbf{81 = 81}$	$\mathbf{49 = 81}$	równość fałszywa	równość fałszywa
równość **prawdziwa**	równość fałszywa		

Spośród wymienionych w odpowiedziach wartości $\boldsymbol{x}$, tylko dla $\boldsymbol{x = -10}$ (odp. A) otrzymaliśmy prawdziwą równość. Oznacza to, że odp. **A** jest prawidłowa.

13.53.

Rozwiązanie I:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Dla $a = 2x, \quad b = 9 - x, \quad c = -24$
korzystamy z twierdzenia w ramce obok:

$(9-x)^2 = 2x \cdot (-24)$ → po lewej stronie **wzór skr**. **mnożenia** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot x + x^2 = -48x$

$81 - 18x + x^2 = -48x$ → przerzucamy wszystko na lewą stronę (równanie kwadratowe)

$81 - 18x + x^2 + 48x = 0$

$x^2 + 30x + 81 = 0$

$a_* = 1, \quad b_* = 30, \quad c_* = 81, \qquad -b_* = -30$

$\Delta = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 900 - 324 = 576 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\Delta} = 24$

$x_1 = \dfrac{-30-24}{2 \cdot 1} = \dfrac{-54}{2} = \mathbf{-27}, \qquad x_2 = \dfrac{-30+24}{2 \cdot 1} = \dfrac{-6}{2} = \mathbf{-3}$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

W miejsce $\boldsymbol{x}$ podstawiamy proponowane w odpowiedziach wartości i **dopiero później** sprawdzamy wzorem $b^2 = a \cdot c$, czy powstały ciąg $(a;\, b;\, c)$ jest geometryczny.

Zaczynamy sprawdzanie od odpowiedzi A i D, które zawierają po **jednej liczbie**:

A. $\boldsymbol{x = 1}$

$(2 \cdot \mathbf{1},\ 9 - \mathbf{1},\ -24)$

$(2,\ 8,\ -24)$

$a = 2,\ b = 8,\ c = -24$

$b^2 = a \cdot c$

$8^2 = 2 \cdot (-24)$

$\mathbf{64} = \mathbf{-48}$

równość fałszywa

D. $\boldsymbol{x = 27}$

$(2 \cdot \mathbf{27},\ 9 - \mathbf{27},\ -24)$

$(54,\ -18,\ -24)$

$a = 54,\ b = -18,\ c = -24$

$b^2 = a \cdot c$

$(-18)^2 = 54 \cdot (-24)$

$\mathbf{324} = \mathbf{-1296}$

równość fałszywa

Odrzucamy odpowiedzi A i D. Sprawdzenia odp. B i C **nie musimy** robić dla $\boldsymbol{x = -3}$, bo ta liczba występuje w obu zbiorach. Dla $\boldsymbol{x = -3}$ ciąg **na pewno** jest geometryczny.

B. $\boldsymbol{x = -6}$

$(2 \cdot (-\mathbf{6}),\ 9 - (-\mathbf{6}),\ -24)$

$(-12,\ 9 + 6,\ -24)$

$(-12,\ 15,\ -24)$

$a = -12,\ b = 15,\ c = -24$

$b^2 = a \cdot c$

$15^2 = -12 \cdot (-24)$

$\mathbf{225} = \mathbf{288}$

równość fałszywa

C. $\boldsymbol{x = -27}$

$(2 \cdot (-\mathbf{27}),\ 9 - (-\mathbf{27}),\ -24)$

$(-54,\ 9 + 27,\ -24)$

$(-54,\ 36,\ -24)$

$a = -54,\ b = 36,\ c = -24$

$b^2 = a \cdot c$

$36^2 = -54 \cdot (-24)$

$\mathbf{1296} = \mathbf{1296}$

równość **prawdziwa**

Obliczenia jednoznacznie wskazują, że odp. **C** jest poprawna.

13.54.
Dla $a = x$, $b = -8$, $c = x^2$
korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny,
gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$(-8)^2 = x \cdot x^2$

$64 = x^3$

$-x^3 = -64 \quad |:(-1)$

$x^3 = 64 \quad |\sqrt[3]{}$

$x = \mathbf{4}$

Jedynie dla $\boldsymbol{x = 4}$ ciąg jest geometryczny.

Odp. **B**

13.55.

Wybieramy przykładową wartość $x \neq -1$. Może być np. $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$.
Podstawiamy **3** w miejsce $\boldsymbol{x}$ do wszystkich odpowiedzi, następnie sprawdzamy za pomocą wzoru $b^2 = a \cdot c$, czy ciąg $(a,\ b,\ c)$ jest geometryczny.

A. $(x+1,\ x+2,\ x+4)$

$(\mathbf{3}+1,\ \mathbf{3}+2,\ \mathbf{3}+4)$

$(4,\quad 5,\quad 7)$

$a=4,\ \ b=5,\ \ c=7$

$b^2 = a \cdot c$

$5^2 = 4 \cdot 7$

$\mathbf{25} = \mathbf{28}$

równość fałszywa

B. $(x+4,\ 2x+2,\ 4x+1)$

$(\mathbf{3}+4,\ 2 \cdot \mathbf{3}+2,\ 4 \cdot \mathbf{3}+1)$

$(7,\quad 8,\quad 13)$

$a=7,\quad b=8,\quad c=13$

$b^2 = a \cdot c$

$8^2 = 7 \cdot 13$

$\mathbf{64} = \mathbf{91}$

równość fałszywa

C. $(x+1,\ 2x+1,\ 4x+1)$

$(\mathbf{3}+1,\ 2 \cdot \mathbf{3}+1,\ 4 \cdot \mathbf{3}+1)$

$(4,\quad 7,\quad 13)$

$a=4,\ \ b=7,\ \ c=13$

$b^2 = a \cdot c$

$7^2 = 4 \cdot 13$

$\mathbf{49} = \mathbf{52}$

równość fałszywa

D. $(x+1,\ 2x+2,\ 4x+4)$

$(\mathbf{3}+1,\ 2 \cdot \mathbf{3}+2,\ 4 \cdot \mathbf{3}+4)$

$(4,\quad 8,\quad 16)$

$a=4,\quad b=8,\quad c=16$

$b^2 = a \cdot c$

$8^2 = 4 \cdot 16$

$\mathbf{64} = \mathbf{64}$

równość **prawdziwa**

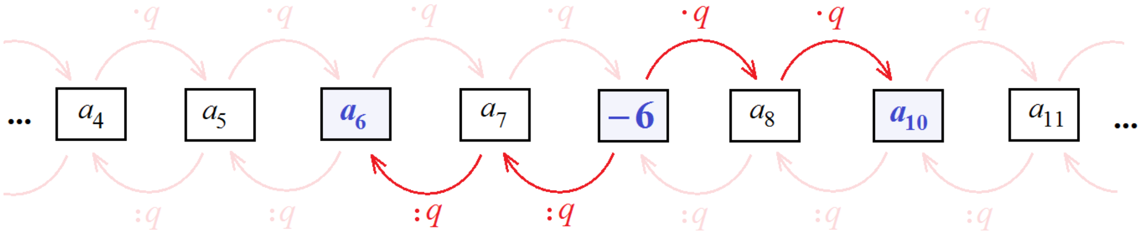
Okazało się, że dla $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$ tylko ciąg $(x+1,\ 2x+2,\ 4x+4)$ – ten z odp. **D** – jest geometryczny.

Odp. **D**

13.56.

Rozwiązanie I:

Odpowiedzi wskazują na to, że znając wartość $a_8 = -6$, trzeba obliczyć $a_6 \cdot a_{10}$.



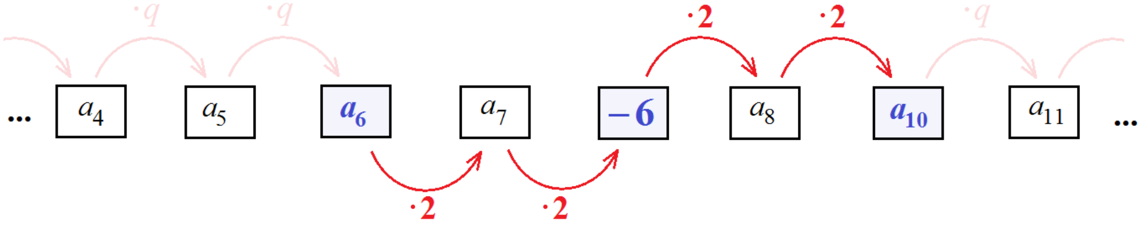
Z powyższego schematu wynika, że $-6 \cdot q^2 = a_{10}$ oraz $\frac{-6}{q^2} = a_6$.

Zatem $a_6 \cdot a_{10} = \underbrace{-6 \cdot q^2}_{a_6} \cdot \underbrace{\left(\frac{-6}{q^2}\right)}_{a_{10}} = -6 \cdot (-6) = \mathbf{36}$ (q^2 się skraca).

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Dla ułatwienia obliczeń, można przyjąć dowolną (różną od zera) wartość q, np. $q = 2$.



Wówczas mamy równania $a_6 \cdot 2 \cdot 2 = -6$ oraz $-6 \cdot 2 \cdot 2 = a_{10}$, które rozwiązujemy:

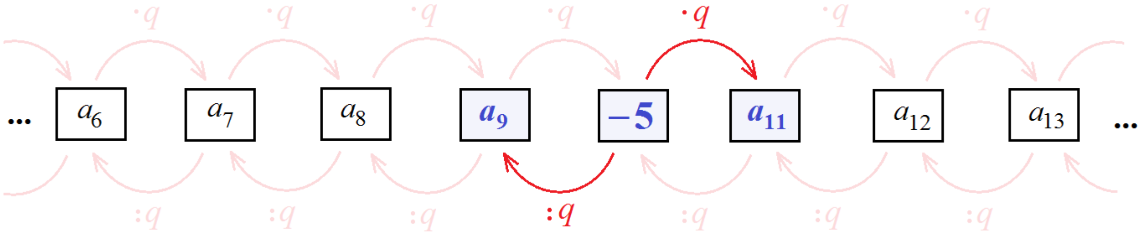
$a_6 \cdot 2 \cdot 2 = -6$	$-6 \cdot 2 \cdot 2 = a_{10}$
$4a_6 = -6 \quad \vert : 4$	$-24 = a_{10}$
$a_6 = \frac{-6}{4} = \mathbf{-1{,}5}$	$a_{10} = \mathbf{-24}$

Obliczamy szukane $a_6 \cdot a_{10} = -1{,}5 \cdot (-24) = \mathbf{36}$. Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

13.57.

Rozwiązanie I:

Odpowiedzi wskazują na to, że znając wartość $a_{10} = -5$, trzeba obliczyć $a_9 \cdot a_{11}$.



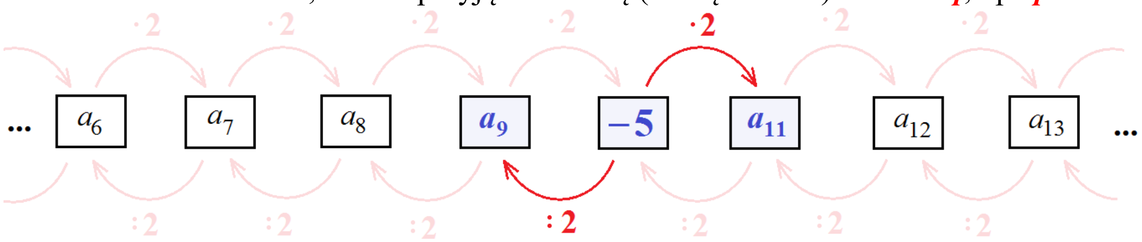
Z powyższego schematu wynika, że $\frac{-5}{q} = a_9$ oraz $-5 \cdot q = a_{11}$.

Zatem $a_9 \cdot a_{11} = \underbrace{\frac{-5}{q}}_{a_9} \cdot \underbrace{(-5q)}_{a_{11}} = -5 \cdot (-5) = \mathbf{25}$ (q się skraca).

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Dla ułatwienia obliczeń, można przyjąć dowolną (różną od zera) wartość q, np. $q = 2$.



Wówczas mamy równania $-5 : 2 = a_9$ oraz $-5 \cdot 2 = a_{11}$, więc $a_9 = -2{,}5$ oraz $a_{11} = -10$.

Zatem $a_9 \cdot a_{11} = -2{,}5 \cdot (-10) = 25$. Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

13.58.

Dla $a = x, \quad b = -3, \quad c = y$

korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$(-3)^2 = x \cdot y$

$\mathbf{9} = x \cdot y$

Odp. **D**

13.59.

Mamy do czynienia z ciągiem $(x, \sqrt{2}, y)$. Należy obliczyć $x \cdot y$.

Dla $a = x, \; b = \sqrt{2}, \; c = y$

korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$(\sqrt{2})^2 = x \cdot y$

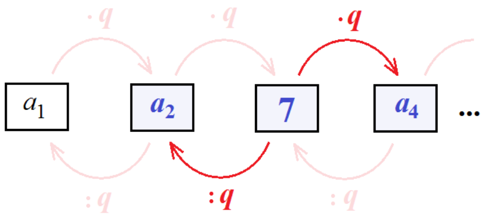
$\mathbf{2} = x \cdot y$

Odp. **C**

13.60.

Rozwiązanie I:

Ze schematu widocznego obok wynikają równania $\frac{7}{q} = a_2$ oraz $7 \cdot q = a_4$.

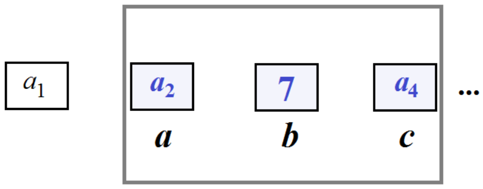


Zatem $a_2 \cdot a_4 = \frac{7}{q} \cdot 7 \cdot q = 7 \cdot 7 = \mathbf{49}$.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Można też zauważyć, że wyrazy $(a_2, 7, a_4)$ tworzą trójwyrazowy ciąg geometryczny (a, b, c).



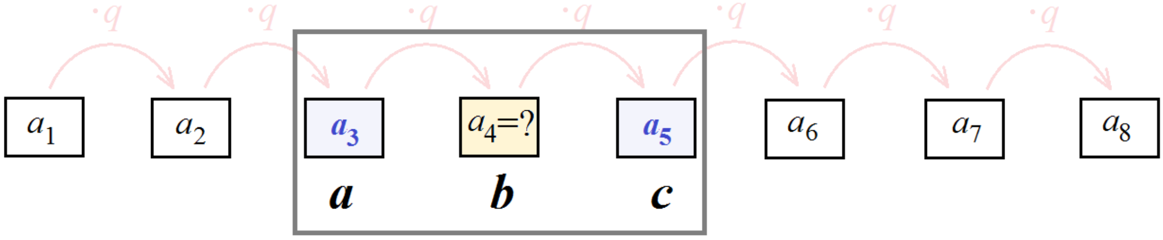
Dla ciągu geometrycznego $(a_2, 7, a_4)$, zgodnie ze wzorem $b^2 = a \cdot c$, prawdziwa jest równość $7^2 = a_2 \cdot a_4$, czyli $\mathbf{49} = a_2 \cdot a_4$. Oznacza to, że odpowiedź **D** jest poprawna.

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

13.61.

Z treści zadania wynika, że $a_3 \cdot a_5 = 6$. Należy obliczyć a_4.

W zadaniu pojawiają się **trzy <u>kolejne</u>** wyrazy ciągu, tzn. $a_3,\ a_4,\ a_5$.



Traktujemy te trzy wyrazy $a_3,\ a_4,\ a_5$ jako trójwyrazowy ciąg geometryczny $(a,\ b,\ c)$, tzn. $a = a_3, \quad b = a_4, \quad c = a_5$.

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

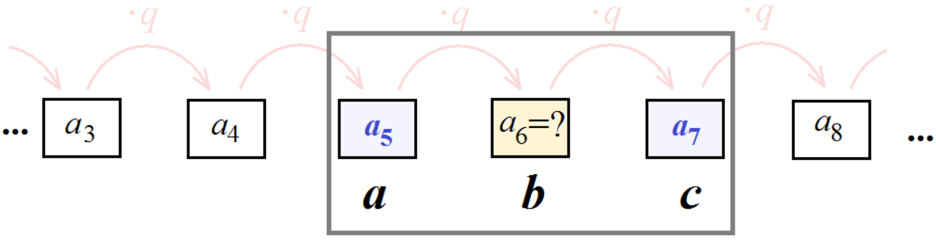
Ze wzoru widocznego w ramce znajdującej się obok, mamy $a_4^{\ 2} = a_3 \cdot a_5$.

Ponieważ $a_3 \cdot a_5 = 6$ (z treści zadania), to $a_4^{\ 2} = 6$, czyli $a_4 = \sqrt{6} \approx \mathbf{2{,}45}$, zatem $2 \le \underbrace{a_4}_{\mathbf{2,45}} \le 3$.

Odp. **B**

13.62.

W zadaniu pojawiają się **trzy <u>kolejne</u>** wyrazy ciągu, tzn. a_5, a_6, a_7.



Traktujemy te trzy wyrazy a_5, a_6, a_7 jako trójwyrazowy ciąg geometryczny $(a,\ b,\ c)$, tzn. $a = a_5,\quad b = a_6,\quad c = a_7$.

> Ciąg (a, b, c) jest geometryczny,
> gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Ze wzoru widocznego w ramce znajdującej się obok, mamy $a_6^{\ 2} = a_5 \cdot a_7$.

Ponieważ $a_3 \cdot a_5 = 100$ (z treści zadania), to $a_6^{\ 2} = 100$.

$a_6^{\ 2} = 100 \qquad |\sqrt{\ }$

$a_6 = 10 \qquad$ lub $\qquad a_6 = -10$

Rozwiązanie $a_6 = 10$ odrzucamy z uwagi na założenie $a_6 < 0$. Zatem $a_6 = \mathbf{-10}$.

Odp. **B**

13.63.

Z treści zadania wynika, że dla ciągu $(a,\ b,\ c)$ zachodzi równość $a \cdot c = 25$. Należy obliczyć ***b***.

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

Ze wzoru znajdującego się w ramce obok wynika, że $b^2 = \underbrace{a \cdot c}_{25}$, czyli $b^2 = 25$.

$b^2 = 25 \qquad |\sqrt{\ }$

$b = 5 \qquad$ lub $\qquad b = -5$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo ciąg ma zawierać same dodatnie wyrazy. Zatem ***b* = 5**.

Odp. **C**

13.64.

Korzystamy ze wzoru znajdującego się w ramce obok:

Ciąg (x, y, z) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{y^2 = x \cdot z}$

$y^2 = \underbrace{x \cdot z}_{8}$

$y^2 = 8$

$y = \sqrt{8}$ lub $y = -\sqrt{8}$

$y = \mathbf{2\sqrt{2}}$ lub $y = \mathbf{-2\sqrt{2}}$

Oznacza to, że $\boldsymbol{y}$ może być równe $\mathbf{-2\sqrt{2}}$.

Odp. **B**

13.65.

Korzystamy ze wzoru znajdującego się w ramce obok:

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, gdy $\boldsymbol{b^2 = a \cdot c}$

$b^2 = \underbrace{a \cdot c}_{9}$

$b^2 = 9$

$b = 3$ lub $b = -3$

Należy obliczyć b^4.

Dla $b = 3$ mamy $b^4 = 3^4 = \mathbf{81}$.

Dla $b = -3$ otrzymamy **ten sam wynik**: $b^4 = (-3)^4 = \mathbf{81}$.

Odp. **D**

13.66.

Rozwiązanie I:

$$\boxed{-2019} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot(-1)} \boxed{a_8} \ \ldots$$

Iloraz $q = -1$ **zmienia tylko znaki** w kolejnych wyrazach ciągu.

Wobec tego, ciąg wygląda następująco: **–2019**, **2019**, **–2019**, **2019**, **–2019**, **2019**, **...**

Sumujemy **100 początkowych wyrazów**:

$$\underbrace{-2019+2019}_{a_1+a_2=\mathbf{0}}\underbrace{-2019+2019}_{a_3+a_4=\mathbf{0}}\underbrace{-2019+2019}_{a_5+a_6=\mathbf{0}}- \ \ldots \ \underbrace{-2019+2019}_{a_{99}+a_{100}=\mathbf{0}}=\mathbf{0}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Korzystamy ze wzoru przedstawionego obok w ramce, wstawiając $n = 100,\ a_1 = -2019,\ q = -1$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}}$$

Zatem $S_{100} = \dfrac{-2019\cdot\left(1-(-1)^{100}\right)}{1-(-1)}$.

Ponieważ $(-1)^{100} = \mathbf{1}$, to $S_{100} = \dfrac{-2019\cdot(1-\mathbf{1})}{1-(-1)} = \dfrac{-2019\cdot\mathbf{0}}{1+1} = \dfrac{\mathbf{0}}{2} = \mathbf{0}$. Odp. **B** jest poprawna.

13.67.

Korzystamy ze wzoru przedstawionego obok w ramce, wstawiając $n = 20,\ a_1 = -2,\ q = 3$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}}$$

Zatem $S_{20} = \dfrac{-2 \cdot (1 - 3^{20})}{1 - 3} = \dfrac{-2 \cdot (1 - 3^{20})}{-2} = \mathbf{1 - 3^{20}}$.

Odp. **A**

13.68.

Każdy kolejny wyraz ciągu $(4;\ -8;\ 16;\ -32;\ldots$ jest **podwojeniem** poprzedniego z uwzględnieniem **zmiany znaku na przeciwny**:

Kontynuujemy wypisywanie wyrazów ciągu zgodnie z tą zasadą:

4, –8, 16, –32, 64, **–128**, **256**, –512, 1024, **–2048**, 4096, ...

Wśród wypisywanych liczb **nie ma** **dodatniej** liczby **512**.

Odp. **C**

13.69.

Rozwiązanie I:

Korzystamy ze wzoru przedstawionego obok w ramce, wstawiając $n = 10,\ a_1 = 3,\ q = 2$.

> Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem
>
> $$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}}$$

Zatem:

$$S_{10} = \frac{3\cdot(1-2^{10})}{1-2} = \frac{3\cdot(1-2^{10})}{-1} = \frac{3}{-1}\cdot(1-2^{10}) = -3\cdot(1-2^{10}) = -3+3\cdot 2^{10} = 3\cdot 2^{10} - 3 =$$
$$= \mathbf{3(2^{10}-1)}$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

$$\boxed{3} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_2} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_3} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_4} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_5} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_6} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_7} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_8} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_9} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{a_{10}} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

Z powyższego schematu wynika, że każdy kolejny wyraz ciągu jest 2-krotnie większy od poprzedniego.

W szybki sposób możemy znaleźć wartości 10 początkowych wyrazów na kalkulatorze:

naciskamy:	2	×	3	=	=	=	=	=	=	=	=	=
widzimy na wyświetlaczu wartość:	q	q	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

Uwaga!
Obliczanie kalkulatorem wyrazów ciągu **geometrycznego** zaczynamy **zawsze od** wpisania **ilorazu q**, a nie od a_1 !!!
Otrzymujemy następujący rezultat:

$$\underset{a_1}{\boxed{3}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_2}{\boxed{6}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_3}{\boxed{12}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_4}{\boxed{24}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_5}{\boxed{48}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_6}{\boxed{96}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_7}{\boxed{192}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_8}{\boxed{384}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_9}{\boxed{768}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{a_{10}}{\boxed{1536}} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

Suma 10 początkowych wyrazów to $3+6+12+24+48+96+192+384+768+1536 = \mathbf{3069}$

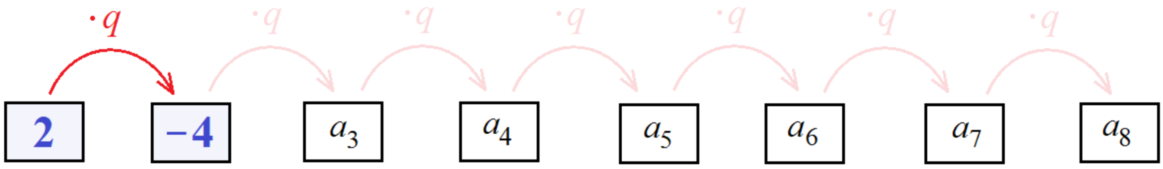
Odrzucamy odpowiedzi A i B, bo liczby $3(-1-2^{10})$ oraz $3(1-2^{10})$ są **ujemne**.

Obliczamy liczby podane w odp. C i D korzystając z tego, że $2^{10} = \mathbf{1024}$.

C. $3(2^{10}+1) = 3\cdot(\mathbf{1024}+1) = 3\cdot 1025 = 3075$, D. $3(2^{10}-1) = 3\cdot(\mathbf{1024}-1) = 3\cdot 1023 = \mathbf{3069}$.

Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

13.70.



Z powyższego schematu wynika równanie $2\cdot q = -4$, czyli $2q = -4$, zatem $\boldsymbol{q = -2}$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}}$$

Dla $\boldsymbol{n} = \mathbf{30}$, $a_1 = 2$ oraz $q = -2$ korzystamy ze wzoru widocznego obok w ramce.

Otrzymujemy $S_{30} = \dfrac{2\cdot\left(1-(-2)^{30}\right)}{1-(-2)}$.

Zauważmy, że $(-2)^{30}$ jest równe 2^{30}, zatem:

$$S_{30} = \frac{2\cdot\left(1-2^{30}\right)}{1-(-2)} = \frac{2\cdot\left(1-2^{30}\right)}{1+2} = \mathbf{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{1-2^{30}}\right).$$

Odp. **C**