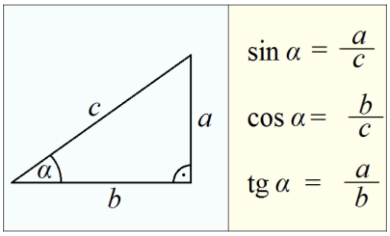
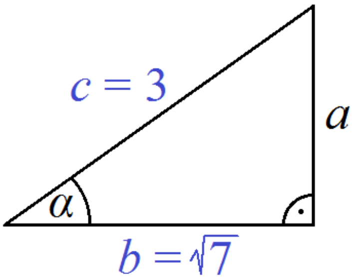
14.1.

Mamy dany $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ oraz wiemy, że $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.



Zakładamy, że $b = \sqrt{7}$, $c = 3$.



Obliczamy brakujący bok a z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3^2$

$a^2 + 7 = 9$

$a^2 = 9 - 7$

$a^2 = 2$

$a = \sqrt{\mathbf{2}}$

Wówczas $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymujemy

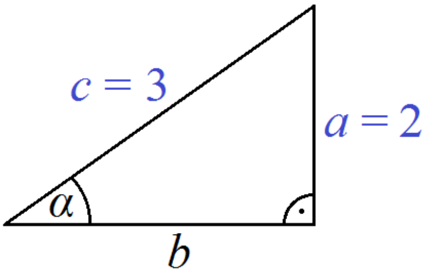
$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{7}}$.

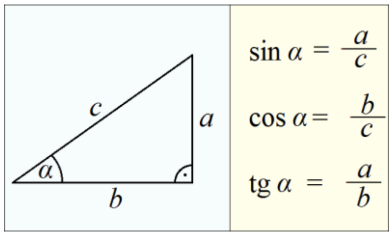
Odp. **D**

14.2.

Mamy dany $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ oraz wiemy, że $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Zakładamy, że $a = 2,\ c = 3$.





Obliczamy brakujący bok b z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$2^2 + b^2 = 3^2$

$4 + b^2 = 9$

$b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$

$b = \sqrt{\mathbf{5}}$

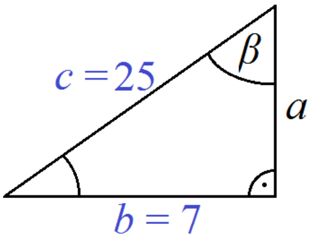
Wówczas $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$.

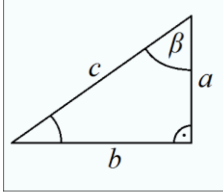
Odp. **C**

14.3.

Mamy dany $\sin\beta = \frac{7}{25}$ oraz wiemy, że $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Zakładamy, że $b = 7,\ c = 25$.





$\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$

$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$

Obliczamy brakujący bok a z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + 7^2 = 25^2$

$a^2 + 49 = 625$

$a^2 = 625 - 49$

$a^2 = 576$

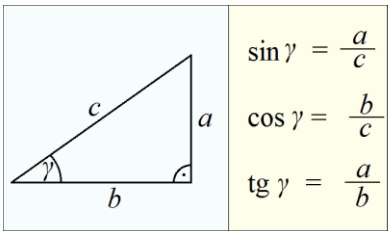
$a = \mathbf{24}$

Wówczas $tg\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}$.

Odp. **B**

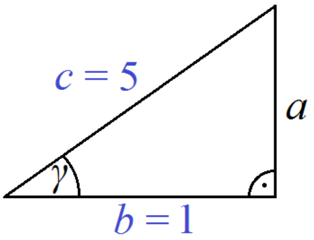
14.4.

Kąt γ możemy potraktować jakby to był kąt α.



Mamy dany $\cos\gamma = \frac{1}{5}$ oraz wiemy, że $\cos\gamma = \frac{b}{c}$.

Zakładamy, że $b = 1,\ c = 5$.



Obliczamy brakujący bok a z tw. Pitagorasa:

$a^2 + 1^2 = 5^2$

$a^2 + 1 = 25$

$a^2 = 25 - 1$

$a^2 = 24$

$a = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

Wówczas $\sin\gamma = \frac{a}{c} = \mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$. Odrzucamy odpowiedzi A i B.

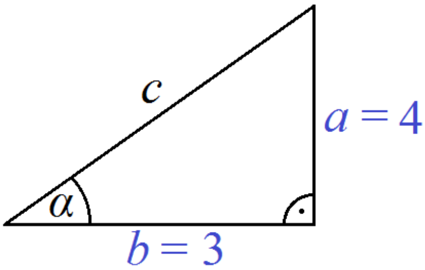
Liczymy $tg\,\gamma$. Zatem $tg\,\gamma = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{6}}{1} = \mathbf{2\sqrt{6}}$.

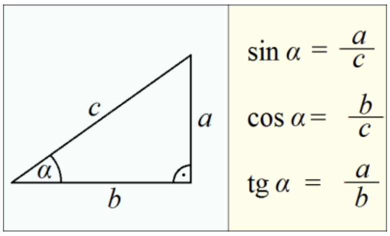
Odp. **C**

14.5.

Mamy dany $tg\alpha = \frac{2}{3}$ oraz wiemy, że $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

Zakładamy, że $a = 4,\ b = 3$.





Obliczamy brakujący bok c z tw. Pitagorasa:

$4^2 + 3^2 = c^2$

$16 + 9 = c^2$

$25 = c^2$

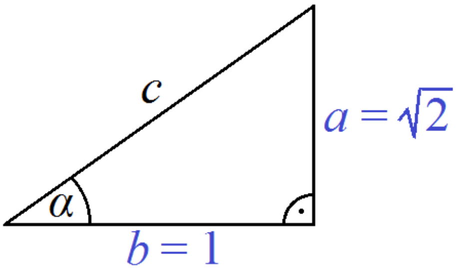
$\mathbf{5} = c$

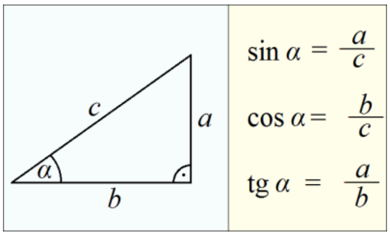
Liczymy $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.

Odp. **A**

14.6.

$tg\,\alpha = \sqrt{2}$ traktujemy jak $\frac{\sqrt{2}}{1}$. Wiadomo, że $tg\alpha = \frac{a}{b}$, zatem można założyć, że $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.





Obliczamy brakujący bok c z tw. Pitagorasa:

$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = c^2$

$2 + 1 = c^2$

$3 = c^2$

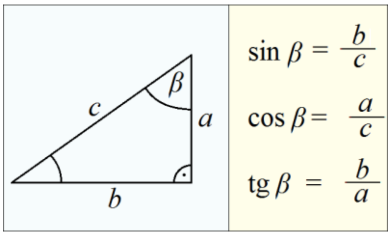
$\sqrt{\mathbf{3}} = c$

Liczymy $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$. Usuwając niewymierność z mianownika, mamy $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$.
Odrzucamy odpowiedzi A i B.

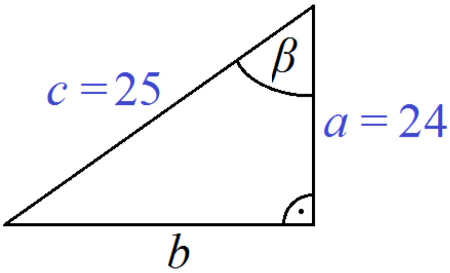
Liczymy $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$. Usuwając niewymierność z mianownika, mamy $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}$.

Odp. **D**

14.7.



Mamy dany $\cos\beta = 0{,}96 = \frac{96}{100} = \frac{48}{50} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{25}}$ oraz wiemy, że $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Zakładamy, że $a = 24,\ c = 25$.



Obliczamy brakujący bok b z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$24^2 + b^2 = 25^2$

$576 + b^2 = 625$

$b^2 = 625 - 576$

$b^2 = 49$

$b = \mathbf{7}$

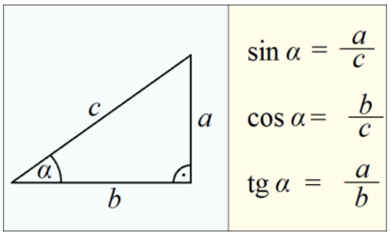
Wówczas $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}$. Odrzucamy odpowiedzi A i D.

Liczymy $tg\,\beta$. Zatem $tg\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}$.

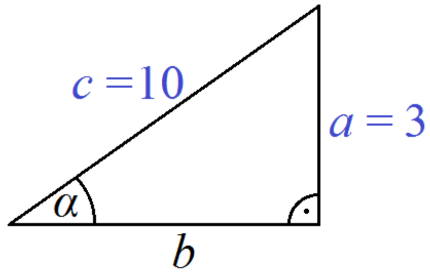
Odp. **B**

14.8.

Mamy dany $\sin\alpha = 0{,}3 = \mathbf{\frac{3}{10}}$ oraz wiemy, że $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.



Zakładamy, że $a = 3,\ c = 10$.



Obliczamy brakujący bok b z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + b^2 = 10^2$

$9 + b^2 = 100$

$b^2 = 100 - 9$

$b^2 = 91$

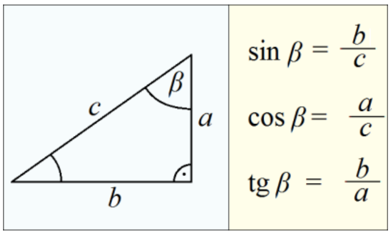
$b = \mathbf{\sqrt{91}}$

Wówczas $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \mathbf{\frac{3}{\sqrt{91}}}$.

Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymujemy $\frac{3}{\sqrt{91}} \cdot \frac{\sqrt{91}}{\sqrt{91}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{91}}{91}}$.

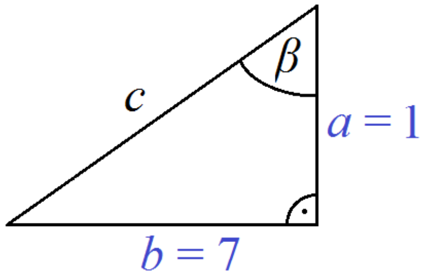
Odp. **C**

14.9.



Dany $tg\,\beta = 7$ traktujemy jak $\mathbf{\frac{7}{1}}$. Ponieważ wiadomo, że

$tg\,\beta = \frac{b}{a}$, możemy założyć, że $b = 7,\ a = 1$.



Obliczamy brakujący bok c z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 7^2 = c^2$

$1 + 49 = c^2$

$50 = c^2$

$c = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

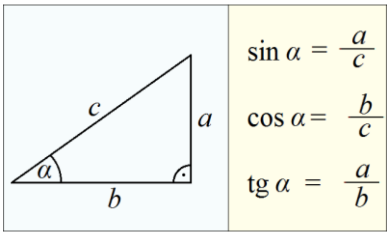
Wówczas $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5\sqrt{2}}}$. Usuwamy niewymierność z mianownika:

$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{\mathbf{7\sqrt{2}}}{\mathbf{10}}$. Odrzucamy odpowiedzi A i C.

Liczymy $\cos\beta$. Zatem $\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5\sqrt{2}}}$, zatem $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{10}}$.

Odp. **B**

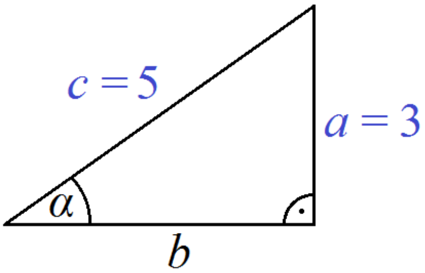
14.10.



Mamy dany $\sin\alpha = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \mathbf{\frac{3}{5}}$ oraz wiemy, że

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Zakładamy, że $a = 3,\ c = 5$.



Obliczamy brakujący bok b z tw. Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + b^2 = 5^2$

$9 + b^2 = 25$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

$b = \mathbf{4}$

Wówczas $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = \mathbf{0{,}8}$. Odrzucamy odpowiedzi A i B.

Liczymy $tg\,\alpha$. Zatem $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$.

Odp. **C**

14.11.

$$\frac{3\sin\alpha}{5}-\frac{4\cos\alpha}{9}=0$$

$$\frac{3\sin\alpha}{5}=\frac{4\cos\alpha}{9}$$ → mnożymy równanie „na krzyż”

$$3\sin\alpha\cdot 9=5\cdot 4\cos\alpha$$

$$27\sin\alpha=20\cos\alpha \qquad |:\cos\alpha$$

$$\frac{27\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{20\cos\alpha}{\cos\alpha}$$ → po lewej stronie wykorzystujemy wzór $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha$

$$27tg\,\alpha=20 \qquad |:27$$

$$tg\,\alpha=\frac{20}{27}\approx \mathbf{0{,}74}$$

Oznacza to, że spełniony jest warunek $0{,}7<\underbrace{tg\,\alpha}_{\mathbf{0{,}74}}<0{,}8$.

Odp. **B**

14.12.

$5\cos\beta = \sqrt{5}\sin\beta \qquad |:\cos\beta$

$\frac{5\cos\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{5}\sin\beta}{\cos\beta}$ → $\frac{\cos\beta}{\cos\beta} = 1$, ponadto wykorzystujemy wzór $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = tg\beta$

$5 = \sqrt{5}\cdot tg\,\beta$

$\sqrt{5}\,tg\beta = 5 \qquad |:\sqrt{5}$

$tg\,\beta = \frac{5}{\sqrt{5}}$

usuwamy niewymierność z mianownika: $\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\mathbf{5}}$.

Odp. **B**

14.13.

$\sin\gamma = 2019 \cdot \cos\gamma \qquad |:\cos\gamma$

$\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2019 \cdot \cos\gamma}{\cos\gamma}$ → $\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma} = 1$, ponadto wykorzystujemy wzór $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = tg\gamma$

$tg\,\gamma = \mathbf{2019}$

Odp. **D**

14.14.

$3\cos\alpha - 2\sin\alpha = 0 \qquad |:\cos\alpha$

$\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$3 - 2tg\,\alpha = 0$

$-2tg\,\alpha = -3 \qquad |:(-1)$

$2tg\,\alpha = 3 \qquad |:2$

$tg\,\alpha = \mathbf{\frac{3}{2}}$

Odp. **C**

14.15.

$0{,}69\sin\alpha = 0{,}138\cos\alpha \qquad |:\cos\alpha$

$$\frac{0{,}69\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}138\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$0{,}69 tg\,\alpha = 0{,}138 \qquad |: 0{,}69$

$$tg\,\alpha = \frac{0{,}138}{0{,}69} = \mathbf{0{,}2} = \frac{2}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

Odp. **A**

14.16.

Rozwiązanie I:

Każdy składnik wyrażenia dzielimy przez $\cos\alpha$ i korzystamy z $\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}=1$ oraz $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=tg\,\gamma$.

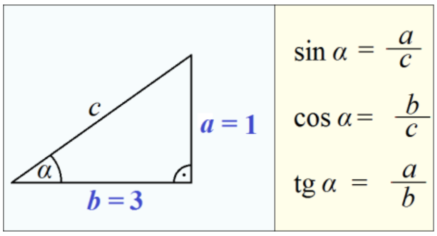
$$\frac{2\cos\gamma}{\cos\gamma+\sin\gamma}=\frac{\frac{2\cos\gamma}{\cos\gamma}}{\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}}=\frac{2\cdot 1}{1+tg\gamma}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{1\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{3}}=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\mathbf{1\frac{1}{2}}.$$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Kąt γ traktujemy jak α. Zatem mamy dane $tg\,\alpha=\frac{1}{3}$ i trzeba wyliczyć $\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

$tg\,\alpha=\frac{a}{b}$, więc przyjmujemy $a=1,\ b=3$, wyliczamy brakujący bok $\boldsymbol{c}$ z tw. Pitagorasa:



$a^2+b^2=c^2$

$1^2+3^2=c^2$

$1+9=c^2$

$10=c^2$

$c=\sqrt{10}\approx\mathbf{3{,}16}$

$\sin\alpha=\frac{a}{c}\approx\frac{1}{3{,}16}\approx\mathbf{0{,}316}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}\approx\frac{3}{3{,}16}\approx\mathbf{0{,}949}$

$\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\approx\frac{2\cdot\mathbf{0{,}949}}{\mathbf{0{,}949}+\mathbf{0{,}316}}=\frac{1{,}898}{1{,}265}\approx\mathbf{1{,}5}$. Oznacza to, że odp. **A** jest prawidłowa.

14.17.

Rozwiązanie I:

Każdy składnik wyrażenia dzielimy przez $\cos\alpha$ i korzystamy z $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1$ oraz $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha$.

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{tg\alpha+1}{tg\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=\frac{3}{1}=\mathbf{3}.$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Dany $tg\,\alpha=2$ traktujemy jak $\frac{2}{1}$. Ponieważ $tg\,\alpha=\frac{a}{b}$, możemy przyjąć że $a=2,\ b=1$.

Wyliczamy brakujący bok ***c*** z tw. Pitagorasa:

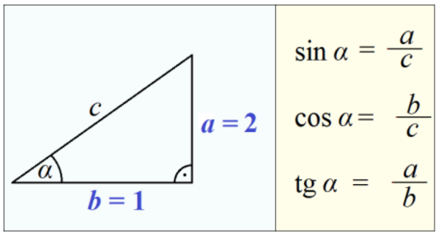
$a^2+b^2=c^2$

$2^2+1^2=c^2$

$4+1=c^2$

$5=c^2$

$c=\sqrt{5}\approx\mathbf{2{,}24}$



$\sin\alpha=\frac{a}{c}\approx\frac{2}{2{,}24}\approx\mathbf{0{,}893}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}\approx\frac{1}{2{,}24}\approx\mathbf{0{,}446}$

$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\approx\frac{0{,}893+0{,}446}{0{,}893-0{,}446}=\frac{1{,}339}{0{,}447}\approx 2{,}9955..\approx\mathbf{3}$. Oznacza to, że odp. **D** jest prawidłowa.

14.18.

Rozwiązanie I:

Każdy składnik wyrażenia dzielimy przez $\cos\alpha$ i korzystamy z $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1$ oraz $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$.

$$\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{2\cos\alpha+4\sin\alpha}=\frac{\frac{6\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{7\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{6tg\alpha-7}{2+4tg\alpha}=\frac{6\cdot\frac{5}{3}-7}{2+4\cdot\frac{5}{3}}=\frac{\frac{30}{3}-7}{2+\frac{20}{3}}=\frac{10-7}{\frac{6}{3}+\frac{20}{3}}=\frac{3}{\frac{26}{3}}=3\cdot\frac{3}{26}=\mathbf{\frac{9}{26}}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Ponieważ $tg\alpha=\frac{5}{3}$ oraz wiemy że $tg\alpha=\frac{a}{b}$, to możemy przyjąć że $a=5,\ b=3$.

Wyliczamy brakujący bok ***c*** z tw. Pitagorasa:

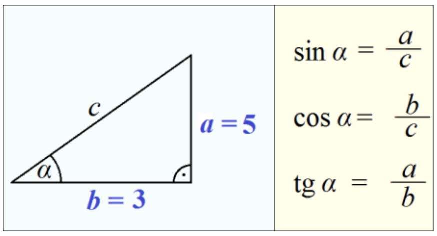
$a^2+b^2=c^2$

$5^2+3^2=c^2$

$25+9=c^2$

$34=c^2$

$c=\sqrt{34}\approx\mathbf{5{,}83}$



$\sin\alpha=\frac{a}{c}\approx\frac{5}{5{,}83}\approx\mathbf{0{,}858}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}\approx\frac{3}{5{,}83}\approx\mathbf{0{,}515}$

$$\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{2\cos\alpha+4\sin\alpha}\approx\frac{6\cdot\mathbf{0{,}858}-7\cdot\mathbf{0{,}515}}{2\cdot\mathbf{0{,}515}+4\cdot\mathbf{0{,}858}}=\frac{5{,}148-3{,}605}{1{,}03+3{,}432}=\frac{1{,}543}{4{,}462}\approx\mathbf{0{,}346}.$$

Sprawdzamy, który z wyników w odpowiedziach jest najbliższy rezultatowi **0,346**:

A. $\frac{1}{26}\approx0{,}038$ B. $\frac{9}{26}\approx\mathbf{0{,}346}$ C. $\frac{3}{26}\approx0{,}115$ D. $\frac{33}{26}\approx1{,}267$

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

14.19.

Rozwiązanie I:

Każdy składnik wyrażenia dzielimy przez $\cos\beta$ i korzystamy z $\frac{\cos\beta}{\cos\beta}=1$ oraz $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=tg\,\beta$.

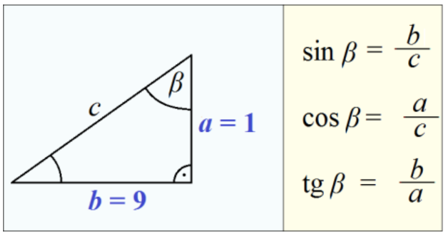
$$\frac{\sin\beta-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\cos\beta}{\cos\beta}}=\frac{tg\,\beta-1}{tg\,\beta+1}=\frac{9-1}{9+1}=\frac{8}{10}=\mathbf{\frac{4}{5}}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Dany $tg\,\beta=9$ traktujemy jako $\frac{9}{1}$ oraz wiemy że $tg\,\beta=\frac{b}{a}$, więc możemy przyjąć że $b=9,\ a=1$.

Wyliczamy brakujący bok ***c*** z tw. Pitagorasa:



$a^2+b^2=c^2$

$1^2+9^2=c^2$

$1+81=c^2$

$82=c^2$

$c=\sqrt{82}\approx\mathbf{9{,}055}$

$\sin\beta=\frac{b}{c}\approx\frac{9}{9{,}055}\approx\mathbf{0{,}994}$

$\cos\beta=\frac{a}{c}\approx\frac{1}{9{,}055}\approx\mathbf{0{,}11}$

$\frac{\sin\beta-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta}\approx\frac{0{,}994-0{,}11}{0{,}994+0{,}11}=\frac{0{,}884}{1{,}104}\approx\mathbf{0{,}8}$. Ponieważ $\frac{4}{5}=0{,}8$, to odp. **B** jest poprawna.

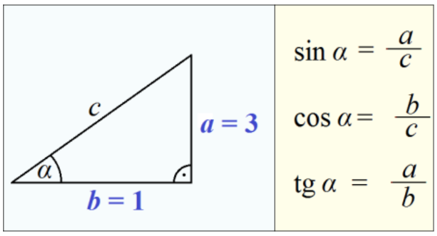
14.20.
Rozwiązanie I:
Każdy składnik wyrażenia dzielimy przez $\cos\gamma$ i korzystamy z $\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}=1$ oraz $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=tg\,\gamma$.

$$\frac{3\sin\gamma-2\cos\gamma}{2\sin\gamma}=\frac{\frac{3\sin\gamma}{\cos\gamma}-\frac{2\cos\gamma}{\cos\gamma}}{\frac{2\sin\gamma}{\cos\gamma}}=\frac{3tg\gamma-2}{2tg\gamma}=\frac{3\cdot\mathbf{3}-2}{2\cdot\mathbf{3}}=\frac{9-2}{6}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:
Kąt γ traktujemy w obliczeniach jako α.

Wówczas $tg\,\alpha=3$ traktujemy jako $\frac{3}{1}$. Ponieważ $tg\,\alpha=\frac{a}{b}$, to możemy założyć że $a=3,\ b=1$.



Brakujący bok ***c*** liczymy z tw. Pitagorasa:

$a^2+b^2=c^2$

$3^2+1^2=c^2$

$9+1=c^2$

$10=c^2$

$c=\sqrt{10}\approx\mathbf{3{,}16}$

$\sin\alpha=\frac{a}{c}\approx\frac{3}{3{,}16}\approx\mathbf{0{,}949}$

$\cos\alpha=\frac{b}{c}\approx\frac{1}{3{,}16}\approx\mathbf{0{,}316}$

$$\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\approx\frac{3\cdot\mathbf{0{,}949}-2\cdot\mathbf{0{,}316}}{2\cdot\mathbf{0{,}949}}=\frac{2{,}847-0{,}632}{1{,}898}=\frac{2{,}215}{1{,}898}\approx\mathbf{1{,}167}.$$

Oceniamy, która z proponowanych liczb w odpowiedziach jest najbliższa rezultatowi **1,167**.

A. $\frac{7}{5}=1{,}4$ B. $\frac{7}{6}=\mathbf{1{,}1666}...$ C. $\frac{1}{2}=0{,}5$ D. $\frac{2}{3}=0{,}6666...$

Wynik **1,1666**..., z odp. B, jest najbliższy rezultatowi **1,167**.

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

14.21.

Rozwiązanie I:

$$5-5\sin^2\left(\frac{\alpha}{5}\right)-5\cos^2\left(\frac{\alpha}{5}\right)=5-5\overbrace{\underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{5}\right)\right]}_{1}}^{\textit{jedynka trygonometryczna}}=5-5\cdot 1=5-5=\mathbf{0}\,.$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy np. $\alpha=30^\circ$ do wyrażenia:

$$5-5\sin^2\left(\frac{30^\circ}{5}\right)-5\cos^2\left(\frac{30^\circ}{5}\right)=5-5\sin^2(6^\circ)-5\cos^2(6^\circ).$$

Wartości $\sin 6^o$ oraz $\cos 6^o$ odczytujemy z tablic matematycznych (karta wzorów, str. 20):

Odczytywanie wartości **sinusa**

$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**

$\boxed{\sin 6^o \approx 0{,}1045}$

Odczytywanie wartości **cosinusa**

$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	–	**0**

$\boxed{\cos 6^o \approx 0{,}9945}$

Uwagi ogólne:

- aby odczytać sinus kąta o danej mierze (stopniowej), należy odszukać stopnie po lewej stronie, i w kolumnie, w której jest napis „sin", odczytać odpowiednią wartość (do 4 miejsc po przecinku,
- aby odczytać cosinus kąta, szukamy stopni po prawej stronie a następnie w kolumnie, w której jest napis „cos", odczytać odpowiednią wartość (do 4 miejsc po przecinku),
- aby odczytać tangens kąta, szukamy stopni po lewej stronie, a następnie w kolumnie, w której jest napis „tg", odczytać odpowiednią wartość (do 4 miejsc po przecinku),
- symbol literowy oznaczający miarę kąta (np. α, β, γ, λ itp.) nie ma wpływu na odczytywaną z dokładnością do 4 miejsc po przecinku wartość funkcji trygonometrycznej. Ma wpływ jedynie nazwa funkcji (sinus, cosinus lub tangens).

$$5-5\sin^2(6^\circ)-5\cos^2(6^\circ)\approx 5-5\cdot(0{,}1045)^2-5\cdot(0{,}9945)^2\approx 5-5\cdot 0{,}011-5\cdot 0{,}99=$$

$$=5-0{,}055-4{,}95=\mathbf{-0{,}005}.$$

Wynik **–0,005**, wśród proponowanych odpowiedzi, jest najbardziej zbliżony do odp. D. 0. Oznacza to, że odp. D jest prawidłowa.

Uwaga! Zamiast podstawiać $\alpha=30^\circ$ można było wybrać dowolną inną wartość liczbową, np. $\alpha=45^\circ$, $\alpha=50^\circ$, itp.

14.22.

Rozwiązanie I:

W rozwiązaniu wykorzystujemy **jedynkę trygonometryczną** $\sin^2\beta+\cos^2\beta=\mathbf{1}$.

$$\frac{2\sin^2\beta+2\cos^2\beta}{5-\sin^2\beta-\cos^2\beta}=\frac{2\cdot\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)}{5-\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)}=\frac{2\cdot\mathbf{1}}{5-\mathbf{1}}=\frac{2}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowo $\beta=30°$ do wyrażenia.

Wyliczamy jego wartość **w przybliżeniu**, korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{2\sin^2\beta+2\cos^2\beta}{5-\sin^2\beta-\cos^2\beta}=\frac{2\sin^2 30°+2\cos^2 30°}{5-\sin^2 30°-\cos^2 30°}\approx$$

$$\approx\frac{2\cdot(\mathbf{0{,}5})^2+2\cdot(\mathbf{0{,}866})^2}{5-(\mathbf{0{,}5})^2-(\mathbf{0{,}866})^2}\approx\frac{2\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}75}{5-0{,}25-0{,}75}=$$

$$=\frac{0{,}5+1{,}5}{4{,}75-0{,}75}=\frac{2}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}866}$$

Obliczenia wskazują, że odp. **C** jest poprawna.

14.23.

Rozwiązanie I:

Niech $2\alpha = x$. W rozwiązaniu skorzystamy z jedynki trygonometrycznej $\cos^2 x + \sin^2 x = \mathbf{1}$.

$$3\cos^2(2\alpha) + 3\sin^2(2\alpha) = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x = 3\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = 3\cdot 1 = \mathbf{3}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowo $\alpha = 30°$ do wyrażenia.
Wyliczamy jego wartość **w przybliżeniu**, korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych.

$$3\cos^2(2\alpha) + 3\sin^2(2\alpha) = 3\cos^2(2\cdot \mathbf{30°}) + 3\sin^2(2\cdot \mathbf{30°}) =$$
$$= 3\cdot\cos^2(60°) + 3\cdot\sin^2(60°) \approx 3\cdot(\mathbf{0{,}5})^2 + 3\cdot(\mathbf{0{,}866})^2 \approx$$
$$\approx 3\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}75 = 0{,}75 + 2{,}25 = \mathbf{3}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}866}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

Okazało się, że odp. **B** jest poprawna.

14.24.

Rozwiązanie I:

W rozwiązaniu korzystamy z **jedynki trygonometrycznej** $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\mathbf{1}$.

$$7\sin^2\alpha+7+7\cos^2\alpha=7\sin^2\alpha+7\cos^2\alpha+7=7\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+7=7\cdot 1+7=\mathbf{14}.$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowo $\alpha=30^\circ$ do wyrażenia.
Wyliczamy jego wartość **w przybliżeniu**, korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych.

$$7\sin^2\alpha+7+7\cos^2\alpha=7\cdot\sin^2\mathbf{30^\circ}+7+7\cdot\cos\mathbf{30^\circ}\approx$$
$$\approx 7\cdot(\mathbf{0{,}5})^2+7+7\cdot(\mathbf{0{,}866})^2\approx 7\cdot 0{,}25+7+7\cdot 0{,}75=$$
$$=1{,}75+7+5{,}25=\mathbf{14}$$

Obliczenia wskazują, że odp. **C** jest poprawna.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}866}$$

14.25.

Rozwiązanie I:

W rozwiązaniu korzystamy z **jedynki trygonometrycznej** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \mathbf{1}$.

$$W = \sqrt{4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = \sqrt{4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{4\cdot 1} = \sqrt{4} = \mathbf{2}.$$

Ponieważ $W = \mathbf{2}$ jest mniejsze niż **4**, to spełniony jest warunek $W < 4$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy przykładowo $\alpha = 30°$ do wyrażenia.
Wyliczamy jego wartość **w przybliżeniu**, korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}866}$$

$$W = \sqrt{4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = \sqrt{4\sin^2(\mathbf{30°}) + 4\cos^2(\mathbf{30°})} \approx$$

$$\approx \sqrt{4\cdot(\mathbf{0{,}5})^2 + 4\cdot(\mathbf{0{,}866})^2} \approx \sqrt{4\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}75} =$$

$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$$

Ponieważ $W = \mathbf{2}$, to spełniony jest warunek $W < 4$.

Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

14.26.

Rozwiązanie I:

Z równania $\alpha + \beta = 90°$ wyznaczamy (przykładowo) β, zatem $\beta = 90° - \alpha$.

Podstawiając $(90° - \alpha)$ w miejsce β, odpowiedzi prezentują się następująco:

A. $\sin\alpha = \sin(90° - \alpha)$ B. $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ C. $\sin\alpha = tg(90° - \alpha)$ D. $\cos\alpha = tg(90° - \alpha)$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych (karta wzorów, str. 16) widzimy, że $\cos(90° - \alpha)$ jest **tym samym**, co $\sin\alpha$.

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\boxed{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

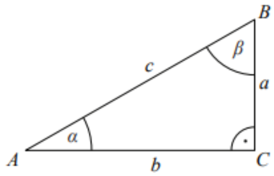
Podstawiamy przykładowo $\alpha = \mathbf{30}°,\ \beta = \mathbf{60}°$, spełniające warunki $\alpha \neq \beta$ oraz $\alpha + \beta = 90°$.
Analizujemy poprawność równań przedstawionych w odpowiedziach:

A. $\sin\mathbf{30}° = \sin\mathbf{60}°$	B. $\sin\mathbf{30}° = \cos\mathbf{60}°$	C. $\sin\mathbf{30}° = tg\mathbf{60}°$	D. $\cos\mathbf{30}° = tg\mathbf{60}°$
$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
równość fałszywa	równość **prawdziwa**	równość fałszywa	równość fałszywa

Okazało się, że dla przykładowych kątów spełniających warunki zadania jedynie z odp. **B** otrzymaliśmy prawdziwe równanie.

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

14.27.
Wykorzystujemy rysunek z **karty wzorów** (str. 14) z dołączonymi wzorami na funkcje trygonometryczne.



$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\boxed{\cos\beta = \frac{a}{c}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$

Zauważmy, że $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ oraz

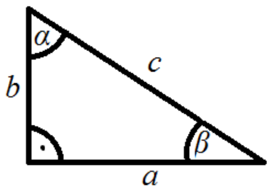
$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$, zatem $\sin\alpha = \cos\beta$.

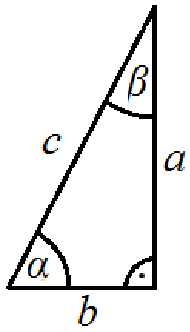
Odp. **B**

14.28.

Rozwiązanie I:

Obracając dołączony do zadania rysunek o $90°$ w lewo, otrzymujemy rysunek z **identycznym układem** boków i kątów, jak w **karcie wzorów** na str. 14.





$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \boxed{\sin\beta = \frac{b}{c}}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \boxed{\cos\beta = \frac{a}{c}}$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}}$ $\quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$

Wykorzystujemy te wzory do obliczenia wyrażenia

$$3tg\,\alpha + \frac{2\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Zatem:

$$3tg\,\alpha + \frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 3\cdot\frac{a}{b} + \frac{2\cdot\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{3a}{b} + \frac{\frac{2a}{c}}{\frac{b}{c}} =$$

$$= \frac{3a}{b} + \frac{2a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{3a}{b} + \frac{2a}{b} = \frac{3a+2a}{b} = \frac{5a}{b} = 5\cdot\frac{a}{b} = 5\cdot\mathbf{tg}\alpha$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Z sumy miar kątów trójkąta na rysunku dołączonym do zadania mamy $\alpha+\beta+90° = 180°$, czyli $\alpha+\beta = 90°$.

Podstawiamy dowolne wartości α, β, dające w sumie $90°$, np. może być $\alpha = \mathbf{60}°, \beta = \mathbf{30}°$.

Wstawiamy $\alpha = \mathbf{60}°, \beta = \mathbf{30}°$ do wyrażenia

$$3tg\,\alpha + \frac{2\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Zatem:

$$3\cdot tg\,\mathbf{60}° + \frac{2\cdot\cos\mathbf{30}°}{\sin\mathbf{30}°} \approx 3\cdot\mathbf{1{,}73} + \frac{2\cdot\mathbf{0{,}866}}{\mathbf{0{,}5}} =$$

$$= 5{,}19 + \frac{1{,}732}{0{,}5} = 5{,}19 + 3{,}464 = \mathbf{8{,}654}$$

Ponieważ założyliśmy wcześniej $\alpha = \mathbf{60}°$, to $tg\,\alpha = tg\mathbf{60}° = \sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}866}$$

$$\mathrm{tg}\ 60^\circ = \sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$$

Do proponowanych odpowiedzi podstawiamy **1,73** w miejsce $tg\,\alpha$ sprawdzając, w której z nich otrzymamy rezultat **jak najbliższy** liczbie **8,654**.

A. $tg\,\alpha \approx 1{,}73$ B. $2tg\,\alpha \approx 2\cdot 1{,}73 = 3{,}46$ C. $\frac{5}{2}tg\,\alpha \approx 2{,}5\cdot 1{,}73 = 4{,}325$

D. $5tg\,\alpha \approx 5\cdot 1{,}73 = \mathbf{8{,}65}$. Najbliżej wyniku **8,654** jest odp. **D** – to ona jest poprawna.

14.29.

Rozwiązanie I:

W rozwiązaniu wykorzystamy **jedynkę trygonometryczną**:

$$\underbrace{1}_{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha .$$

Zadanie polega na znalezieniu takiej odpowiedzi, która da się przekształcić do $\cos^2\alpha$.

Z równania $\alpha+\beta=90°$ wyznaczamy β, zatem $\beta=90°-\alpha$.

Podstawiając $(90°-\alpha)$ w miejsce β, odpowiedzi prezentują się następująco:

A. $\sin(90°-\alpha)$ B. $\cos(90°-\alpha)$ C. $\sin^2(90°-\alpha)$ D. $\cos^2(90°-\alpha)$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych (karta wzorów, str. 16) upraszczamy wyrażenia w odpowiedziach:

- Wybrane wzory redukcyjne

$\boxed{\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha}$	$\boxed{\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha}$	
$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$	
$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180°+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$

A. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ B. $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ C. $\sin^2(90°-\alpha)=\cos^2\alpha$

D. $\cos^2(90°-\alpha)=\sin^2\alpha$ Jedynie odp. **C** dała się przekształcić do postaci $\cos^2\alpha$.

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Z założenia o różnych miarach kątów oraz $\alpha+\beta=90^0$, podstawiamy przykładowe $\alpha=\mathbf{30}°,\ \beta=\mathbf{60}°$.

Zatem wyrażenie $1-\sin^2\alpha = 1-\sin^2(\mathbf{30}°)=$
$=1-(\mathbf{0{,}5})^2 = 1-0{,}25 = \mathbf{0{,}75}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}866}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

Ponieważ wcześniej założyliśmy, że $\beta=\mathbf{60}°$, to do propozycji w odpowiedziach podstawiamy $\beta=\mathbf{60}°$, szukając wyrażenia przyjmującego wartość jak najbliższą liczbie **0,75**.

A. $\sin\beta=\sin\mathbf{60}°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$ B. $\cos\beta=\cos\mathbf{60}°=\frac{1}{2}=0{,}5$

C. $\sin^2\beta=\sin^2\mathbf{60}°\approx(0{,}866)^2\approx\mathbf{0{,}75}$ D. $\cos^2\beta=\cos^2\mathbf{60}°\approx(0{,}5)^2=0{,}25$

Powyższe obliczenia wskazują, że najbliżej rezultatu **0,75** jest liczba $\sin^2\mathbf{60}°\approx(0{,}866)^2$.
Oznacza to, że odp. **C** jest właściwa.

14.30.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że kąty ostre α, β spełniają warunki $\alpha \neq \beta$ oraz $\alpha + \beta = 90°$.

Wyznaczając β z równania $\alpha + \beta = 90°$, otrzymujemy $\beta = 90° - \alpha$.

W odpowiedziach, wstawiamy $(90° - \alpha)$ w miejsce β:

A. $\sin^2 \alpha + \sin^2(90° - \alpha) = 1$

B. $\sin^2 \alpha + \cos^2(90° - \alpha) = 1$

C. $tg\,\alpha + tg(90° - \alpha) = 0$

D. $tg\,\alpha \cdot tg(90° - \alpha) = 0$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych (karta wzorów, str. 16) upraszczamy wyrażenia w odpowiedziach A i B:

- Wybrane wzory redukcyjne

$\boxed{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}$	$\boxed{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

A. $\sin^2 \alpha + \underbrace{\sin^2(90° - \alpha)}_{\cos^2\alpha} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \mathbf{1}$

B. $\sin^2 \alpha + \underbrace{\cos^2(90° - \alpha)}_{\sin^2\alpha} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \mathbf{1}$

W przypadku odpowiedzi **A** otrzymaliśmy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \mathbf{1}$ czyli **jedynkę trygonometryczną**, która jest prawdziwa dla każdego (w szczególności ostrego) kąta α.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Podstawiamy do każdej z propozycji odpowiedzi przykładowe wartości $\alpha = \mathbf{30°}$, $\beta = \mathbf{60°}$ pamiętając, aby wybrane wartości spełniały założenia o sumie $\alpha + \beta = 90°$ oraz o różnych miarach $\alpha \neq \beta$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}866}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

$$\mathrm{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{0{,}577}$$

$$\mathrm{tg}\ 60° = \sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$$

A. $\sin^2(\mathbf{30°}) + \sin^2(\mathbf{60°}) = 1$

$(\mathbf{0{,}5})^2 + (\mathbf{0{,}866})^2 = 1$

$0{,}25 + 0{,}75 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{1 = 1}$

B. $\sin^2(\mathbf{30°}) + \cos^2(\mathbf{60°}) = 1$

$(\mathbf{0{,}5})^2 + (\mathbf{0{,}5})^2 = 1$

$0{,}25 + 0{,}25 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{0{,}5 = 1}$

C. $tg(\mathbf{30°}) + tg(\mathbf{60°}) = 0$

$0{,}577 + 1{,}73 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{2{,}307 = 0}$

C. $tg(\mathbf{30°}) \cdot tg(\mathbf{60°}) = 0$

$0{,}577 \cdot 1{,}73 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{0{,}99821 = 0}$

Widzimy, że tylko w przypadku odpowiedzi **A** otrzymaliśmy **prawdziwą** równość **1 = 1**. Oznacza to, że odp. **A** musi być poprawna.

14.31.

Liczymy $\sin(150°)$ oraz $\cos(135°)$, wykorzystując wzory redukcyjne (karta wzorów, str. 16):

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$	
$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha}$	$\boxed{\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

Aby wykorzystać takie wzory, przykładowo mając $\sin(150°)$, potrzebujemy wyrazić 150° jako różnicę $180°-\alpha$ (łatwo zgadnąć, że musi być $\alpha = \mathbf{30}°$, bo 180 – 150 = **30**).

$$\sin(150°) = \sin\underbrace{(180° - \mathbf{30}°)}_{150°} = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

Mając do policzenia $\cos(135°)$, potrzebujemy wyrazić 135° jako różnicę $180°-\alpha$. W tym przypadku będzie $\alpha = \mathbf{45}°$, bo 180 – 135 = **45**.

$$\cos(135°) = \cos\underbrace{(180° - \mathbf{45}°)}_{135°} = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Podstawiamy $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ do wyrażenia $2\cos^2(135°) + 3\sin(150°)$.

$$2\cos^2(135°) + 3\sin(150°) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{4}{4} + \frac{3}{2} = 1 + 1{,}5 = \mathbf{2{,}5}.$$

Do policzenia była **połowa** tej liczby, więc 2,5 : 2 = **1,25**.

Wśród odpowiedzi wybieramy $\frac{5}{4} = \mathbf{1{,}25}$.

Odp. **D**

14.32.

Do obliczenia każdej z liczb: $tg120°$ oraz $tg135°$, wykorzystujemy wzór redukcyjny z **karty wzorów** (str. 16):

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\boxed{\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha}$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$$tg120° = tg(180° - 60°) = -tg60° = -\sqrt{3}$$

$$tg135° = tg(180° - 45°) = -tg45° = -1$$

$$tg120° \cdot tg135° = (-\sqrt{3}) \cdot (-1) = \boldsymbol{\sqrt{3}}.$$

Odp. **C**

14.33.
Rozwiązanie I:
Do obliczenia liczb $\cos 135°$ oraz $tg\,150°$ wykorzystujemy wzory redukcyjne z **karty wzorów** (str. 16):

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$	
$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$	
$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$	$\boxed{\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha}$	$\boxed{\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha}$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180°+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\cos 135° = \cos(180°-45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg150° = tg(180°-30°) = -tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\cos 135°}{tg150°} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 3} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

Ponieważ do policzenia była **połowa** tej liczby, to $\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}} : 2 = \frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{4}}$.

Odp. **B**

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Rozwiązanie II:
W obliczeniach wykorzystujemy przybliżenia
$\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$, $\sqrt{2}\approx\mathbf{1{,}41}$ oraz $\sqrt{6}\approx\mathbf{2{,}45}$.

$$\cos 135° = \cos(180°-45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx$$

$$\approx -\frac{1{,}41}{2} = \mathbf{-0{,}71}$$

$$tg150° = tg(180°-30°) = -tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -\frac{1{,}73}{3} \approx \mathbf{-0{,}58}.$$

Wówczas $\frac{\cos 135°}{tg150°} \approx \frac{-0{,}71}{-0{,}58} = \frac{0{,}71}{0{,}58} \approx \mathbf{1{,}224}$.
Połowa liczby 1,224 to **0,612**.

Szukamy wśród odpowiedzi wartości liczbowej **jak najbliższej** liczbie **0,612**:

A. $\frac{1}{2} = 0{,}5$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4} \approx \frac{2{,}45}{4} = \mathbf{0{,}6125}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}73}{2} = 0{,}865$ D. $\sqrt{3}\approx 1{,}73$

Z powyższych obliczeń wynika, że rezultat **0,6125** jest najbliżej wyniku **0,612**.
Oznacza to, że odp. **B** jest prawidłowa.

14.34.
Do obliczenia liczb $\sin 180°$ oraz $\cos 180°$ wykorzystujemy wzory redukcyjne z **karty wzorów** (str. 16):

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$	
$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha}$	$\boxed{\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

$$\sin 180° = \sin(180° - 0°) = \sin 0° = \mathbf{0}$$

$$\cos 180° = \cos(180° - 0°) = -\cos 0° = \mathbf{-1}$$

$$W = 1 - (0 - (-1))^2 = 1 - (0+1)^2 = 1 - 1^2 = 1 - 1 = \mathbf{0}\ .$$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Odp. **B**

14.35.
Obliczamy $\sin 135°$, wykorzystując wzór redukcyjny z **karty wzorów** (str. 16).

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\sqrt{2} - \sin 135°\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \sin 135°\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Wykorzystujemy **wzór skróconego mnożenia**
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$, zatem:

$$\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{2}{4} = 2 - 0{,}5 = \mathbf{1{,}5}.$$

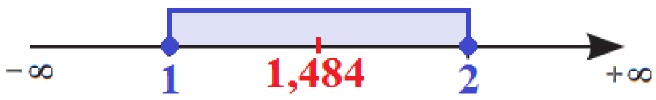
Liczba **1,5** mieści się pomiędzy **1** a **2**, dlatego należy do przedziału $(1, 2)$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:
W obliczeniach wykorzystujemy przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

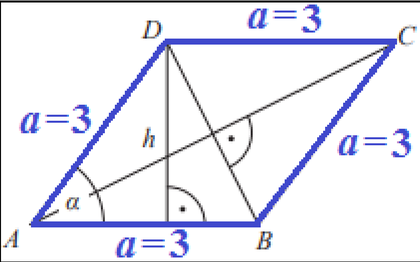
$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}41}{2} \approx \mathbf{0{,}71}.$$

$$\left(\sqrt{2} - \sin 135°\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \sin 135°\right) \approx (1{,}41 - \mathbf{0{,}71}) \cdot (1{,}41 + \mathbf{0{,}71}) = 0{,}7 \cdot 2{,}12 = \mathbf{1{,}484}.$$



Liczba **1,484** leży na osi liczbowej pomiędzy liczbami **1** i **2**, zatem odp. **B** jest poprawna.

14.36.
Korzystamy z informacji zawartych na początku **str. 10** w **karcie wzorów**:



Romb
Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:

$$\boxed{P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Z warunku na obwód rombu obliczamy długość boku, zatem ***a*** = 12 : 4 = **3**.

Z treści zadania wynika, że $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

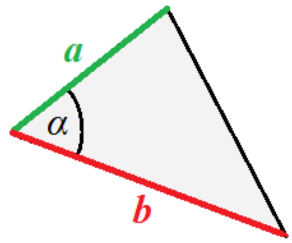
Obliczamy pole rombu ze wzoru $P = a^2 \cdot \sin\alpha$, zatem $P = 3^2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 9 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \mathbf{\frac{18\sqrt{5}}{5}}$.

Odp. **B**

14.37.

Rozwiązanie I:

Korzystamy ze wzoru $P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$, gdzie $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ to dwa boki trójkąta, zaś α jest kątem między tymi dwoma bokami.



Z treści zadania: $a=5,\ b=2\sqrt{3},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem

$$P=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\frac{5\cdot 2\cdot 3}{4}=\frac{30}{4}=\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}.$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

W obliczeniach korzystamy z przybliżenia $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$.

Zatem $\boldsymbol{a}=\mathbf{5}$, $b=2\sqrt{3}\approx 2\cdot 1{,}73=\mathbf{3{,}46}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{0{,}865}$.

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\alpha\approx 0{,}5\cdot 5\cdot 3{,}46\cdot 0{,}865\approx\mathbf{7{,}48}.$$

Wyniki proponowane w odpowiedziach przedstawiamy w postaci dziesiętnej, sprawdzając, który z tych wyników jest **najbliższy** rezultatowi **7,48**:

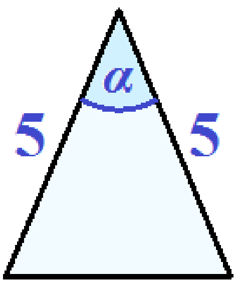
A. 5 B. $5\sqrt{3}\approx 5\cdot 1{,}73=8{,}65$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}\approx\frac{5\cdot 1{,}73}{2}=\frac{8{,}65}{2}=4{,}325$ D. $\frac{15}{2}=\mathbf{7{,}5}$

Wyniki powyższych obliczeń pokazują, że najbliżej wyniku **7,48** jest liczba **7,5** z odp. **D**.

Oznacza to, że odp. **D** jest prawidłowa.

14.38.

Korzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie ***a, b*** – boki trójkąta, zaś α – kąt między bokami ***a*** i ***b***.

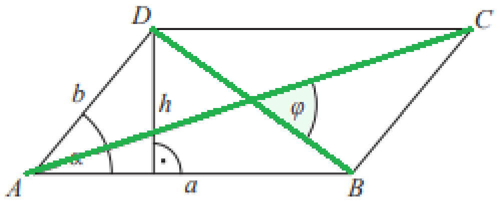


Z treści zadania mamy ***a* = 5**, ***b* = 5** oraz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \mathbf{10}$.

Odp. **C**

14.39.
Korzystamy z **karty wzorów** (na końcu str. 9):



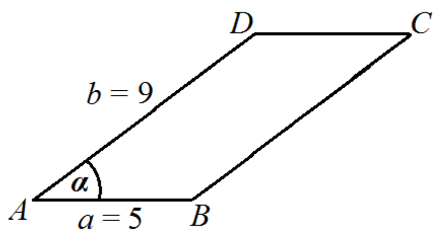
Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:
$$\boxed{P = ah = a\cdot b\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi}$$

Z treści zadania wynika, że można zastosować wzór na pole równoległoboku z przekątnymi:

$$P = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 13\cdot \frac{12}{13} = \frac{1\cdot 4\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 13} = \mathbf{24}.$$

Odp. **C**

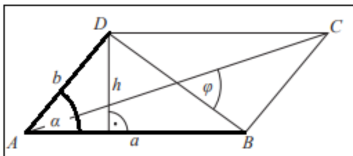
14.40.
Rysujemy równoległobok $ABCD$ i oznaczamy kąt BAD jako α. Wówczas $a = 5$, $b = 9$ oraz $\sin\alpha = 0{,}6$.



Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku
$P = a\cdot b\cdot \sin\alpha$ (**karta wzorów**, str. 9).

$P = 5\cdot 9\cdot 0{,}6 = \mathbf{27}$

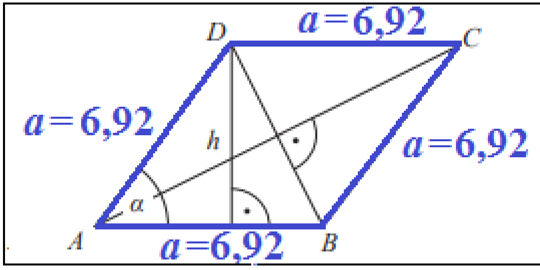
Odp. **B**



Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:
$$\boxed{P = ah = a\cdot b\cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi$$

14.41.

Korzystamy w obliczeniach z przybliżenia $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$. Z treści zadania wiadomo, że $P = 16$.
Obwód rombu wynosi $16 \cdot 1{,}73 = 27{,}68$, więc bok tego rombu ma długość ***a*** **=** 27,68:4 = **6,92**.



Romb
Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:

$$\boxed{P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Korzystamy ze wzoru na pole rombu $P = a^2 \cdot \sin\alpha$ (**karta wzorów**, str. 10).

$15 = 6{,}92^2 \cdot \sin\alpha$

$15 \approx 47{,}89 \cdot \sin\alpha$

$47{,}89 \sin\alpha = 15 \qquad |: 47{,}89$

$\sin\alpha = \dfrac{15}{47{,}89}$

$\sin\alpha \approx \mathbf{0{,}3132}$

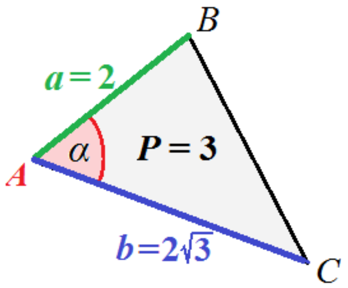
$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**

W tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 20), w kolumnie sinusa szukamy wartości jak najbliższej **0,3132** i wykorzystując ją, odczytujemy przybliżoną miarę kąta α.

Okazuje się, że jeśli $\sin\alpha \approx \mathbf{0{,}3132}$, to miara kąta α wynosi ok. 18° – 19°, tzn. $18^\circ < \alpha < 19^\circ$. Zatem kąt α jest **mniejszy niż 20°**, czyli spełniony jest warunek $\alpha < 20^\circ$.

Odp. **A**

14.42.
Rysujemy trójkąt *ABC*, zaznaczając dane długości boków.



Zadanie dotyczy kąta *BAC*.

W przypadku 3-literowych oznaczeń kątów (np. kąt *BAC*) zawsze **środkowa litera** oznacza wierzchołek, przy którym znajduje się kąt.

Korzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Zatem:

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin\alpha$$

$$3 = 2\sqrt{3}\sin\alpha \qquad |:\left(2\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \sin\alpha$$

Usuwamy niewymierność z mianownika:

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

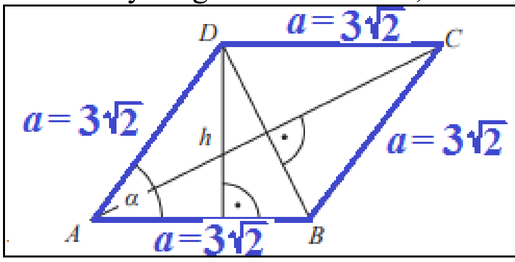
α	$0°$	$30°$	$45°$	$\boxed{60°}$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boxed{\sin\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Ponieważ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to $\alpha = \mathbf{60°}$.

Odp. **C**

14.43.

Obliczamy długość boku rombu, zatem $a = 12\sqrt{2} : 4 = \mathbf{3\sqrt{2}}$.



Romb

Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$\boxed{P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Korzystamy ze wzoru na pole rombu $P = a^2 \cdot \sin\alpha$.

$15 = (3\sqrt{2})^2 \cdot \sin\alpha$

$15 = 9 \cdot 2 \cdot \sin\alpha$

$15 = 18\sin\alpha \qquad |:18$

$\mathbf{0{,}833...} = \sin\alpha$

W tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 20), w kolumnie sinusa szukamy wartości jak najbliższej **0,833** i wykorzystując ją, odczytujemy przybliżoną miarę kąta α.

$\alpha\,[^\circ]$	$\boxed{\sin\alpha}$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**

Okazuje się, że jeśli $\sin\alpha \approx \mathbf{0{,}833}$, to miara kąta α wynosi ok. 56° – 57°, tzn. $56^\circ < \alpha < 57^\circ$.

Zatem kąt α jest **większy od 45°**.

Odp. **D**

14.44.

Pole równoległoboku wynosi $P = 4\frac{4}{5} = \mathbf{4{,}8}$. Wiadomo też, że $\boldsymbol{b = 2}$ (krótszy bok).

Z warunku na obwód wyliczamy dłuższy bok równoległoboku:

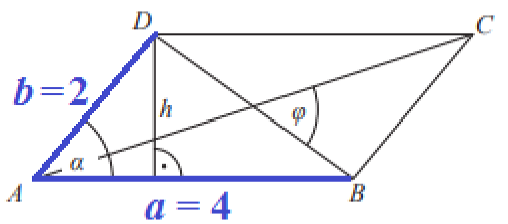
$2a + 2b = 12$

$2a + 2 \cdot 2 = 12$

$2a + 4 = 12$

$2a = 8 \qquad |:2$

$\boldsymbol{a = 4}$



Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$\boxed{P = a \cdot b \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$

Korzystamy ze wzoru na pole $P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$.

$4{,}8 = 4 \cdot 2 \cdot \sin\alpha$

$4{,}8 = 8\sin\alpha \qquad |:8$

$\sin\alpha = \frac{4{,}8}{8}$

$\sin\alpha = \mathbf{0{,}6}$

$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
...	...	...	...
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53

W tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 20), w kolumnie sinusa szukamy wartości jak najbliższej **0,6** i wykorzystując ją, odczytujemy przybliżoną miarę kąta α.

Okazuje się, że jeśli $\sin\alpha = \mathbf{0{,}6}$, to miara kąta α wynosi ok. 37°, tzn. $\alpha \approx \mathbf{37^\circ}$.

Zatem miara kąta α jest **mniejsza od 45°**.

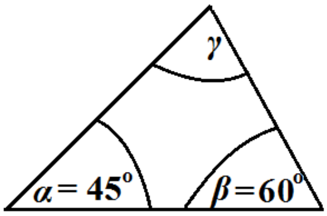
Odp. **A**

14.45.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \mathbf{45^\circ}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \beta = \mathbf{60^\circ}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boxed{\sin\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\boxed{\cos\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



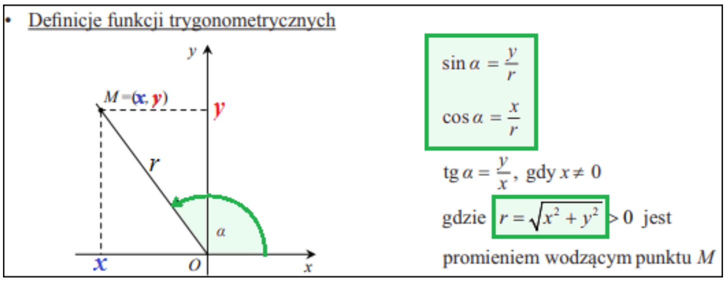
Z sumy miar kątów trójkąta wynika równanie $45^\circ + 60^\circ + \gamma = 180^\circ$.

Zatem $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ$, czyli $\gamma = \mathbf{75^\circ}$.

Odp. **C**

14.46.

Z rysunku dołączonego do zadania widać, że kąt α – ostry, kąt β – rozwarty.



Dla kątów ostrych wszystkie funkcje trygonometryczne są dodatnie.

Z tego powodu **odrzucamy** odp. **B** i **C**, ze względu na $tg\,\alpha = -\frac{5}{2}$.

Następnie wyliczamy $\sin\beta$ oraz $\cos\beta$ dla kąta rozwartego β.

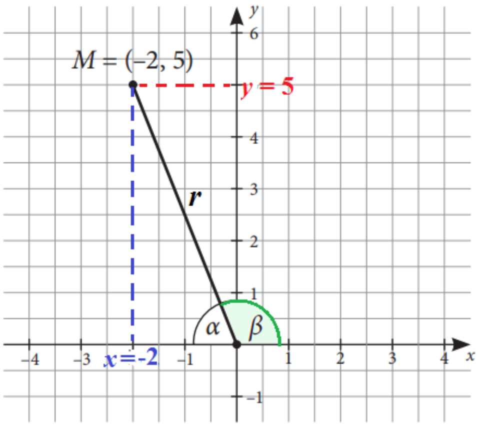
Zgodnie z rysunkiem w **karcie wzorów** (str. 15), zaznaczamy $\boldsymbol{x = -2}$ oraz $\boldsymbol{y = 5}$ i obliczamy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zatem:

$r = \sqrt{(-\mathbf{2})^2 + \mathbf{5}^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{\mathbf{29}}$.

Wówczas:

$$\sin\beta = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{29}} \approx \frac{5}{5{,}39} \approx \mathbf{0{,}9276}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \approx \frac{-2}{5{,}39} \approx \mathbf{-0{,}371}$$



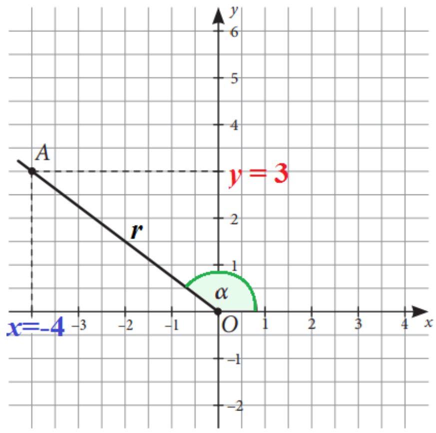
Warunek $0{,}85 < \underbrace{\sin\beta}_{\mathbf{0{,}9276}} < 0{,}9$ **nie jest** spełniony, więc odrzucamy odp. **A**.

Warunek $-0{,}4 < \underbrace{\cos\beta}_{\mathbf{-0{,}371}} < -0{,}35$ **jest spełniony**.

Odp. **D**

14.47.

Zadanie rozwiązujemy w oparciu o rysunek i wzory z **karty wzorów** (na początku str. 15).



Oznaczamy $\boldsymbol{x = -4}$ oraz $\boldsymbol{y = 3}$.

Obliczamy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zatem:

$r = \sqrt{(-\mathbf{4})^2 + \mathbf{3}^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$.

Obliczamy $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.

Odp. **C**

14.48.
Z rysunku wynika, że $\delta + \gamma = 180°$, czyli $\delta = 180° - \gamma$.
Wstawiając $(180° - \gamma)$ zamiast δ i wykorzystując wzory redukcyjne (**karta wzorów**, str. 16), analizujemy poprawność równań przedstawionych w odpowiedziach.

- Wybrane wzory redukcyjne

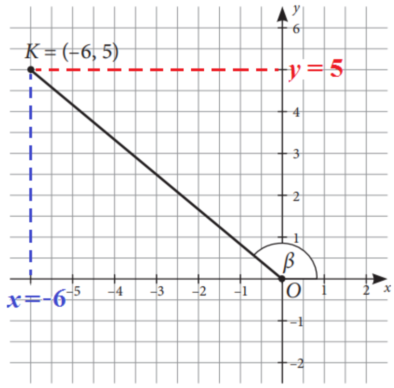
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}$	$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha}$	$\boxed{\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha}$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

A. $\sin\gamma = \cos(180° - \gamma) \quad \rightarrow \quad \sin\gamma = -\cos\gamma$
B. $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma) \quad \rightarrow \quad \sin\gamma = \sin\gamma$
C. $tg\,\gamma = tg(180° - \gamma) \quad \rightarrow \quad tg\,\gamma = -tg\,\gamma$
D. $\cos\gamma = \sin(180° - \gamma) \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \sin\gamma$

Jedyną prawdziwą – spośród powyższych – równością, jest $\sin\gamma = \sin\gamma$.

Odp. **B**

14.49.
Zadanie rozwiązujemy w oparciu o rysunek i wzory z **karty wzorów** (na początku str. 15).



Oznaczamy $\boldsymbol{x = -6}$ oraz $\boldsymbol{y = 5}$.

Obliczamy $tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{-6} = -\frac{5}{6} \approx$ **−0,83333**....

Liczba **−0,83333** na osi liczbowej mieści się pomiędzy liczbami **−1** i **0**, więc należy do przedziału $(-1, 0)$.

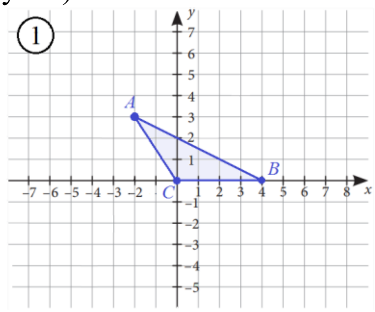
Odp. **B**

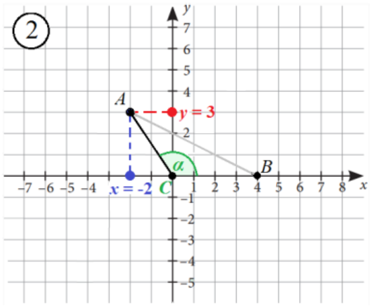
14.50.
Zadanie rozwiązujemy w oparciu o rysunek i wzory z **karty wzorów** (na początku str. 15).

Oznaczamy $x = -\sqrt{3}$, $y = 2$ i obliczamy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Zatem:
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{\mathbf{3}}\right)^2 + \mathbf{2}^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{\mathbf{7}}$.
Wówczas:
$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.
$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\sqrt{\frac{3}{7}}$, z drugiej strony $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{21}}{7}$.
$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} \neq -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

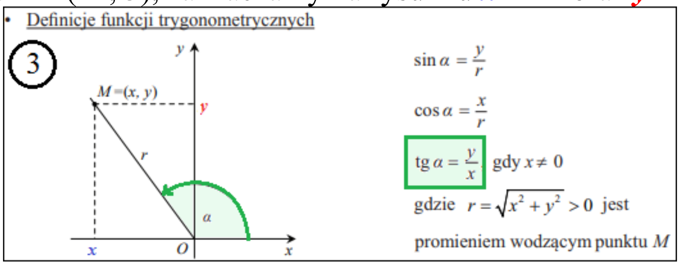
Odp. **D**

14.51.
Zaczynamy od zaznaczenia punktów A, B, C w układzie współrzędnych i narysowania trójkąta (rys. 1). Potem oznaczamy kąt ACB jako α pamiętając, że **środkowa litera** oznacza położenie kąta (rys. 2).





Sytuację w zadaniu kojarzymy z obrazkiem z **karty wzorów** (na początku str. 15).
Ze względu na punkt $A = (-2, 3)$, zaznaczamy na rysunku $\boldsymbol{x = -2}$ oraz $\boldsymbol{y = 3}$ (rys. 2).

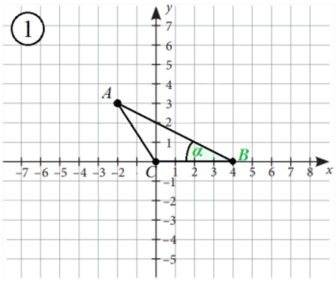


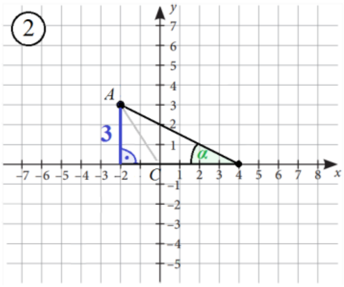
Dla $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{y = 3}$ korzystamy ze wzoru $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x}$. Zatem $tg\,\alpha = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$.

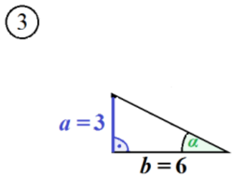
Odp. **A**

14.52.
Tym razem chodzi o kąt ABC, więc zaznaczamy kąt przy wierzchołku $\boldsymbol{B}$ (rys. 1). Rysujemy odcinek z punktu $\boldsymbol{A}$ prostopadle do osi $\boldsymbol{x}$. Ma on długość **3** – trzy kratki (rys. 2).

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych **3** i **6** (rys. 3) mamy $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.



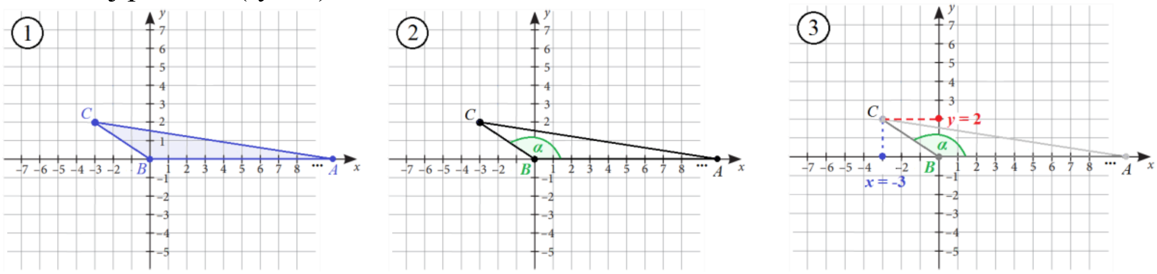




Odp. **A**

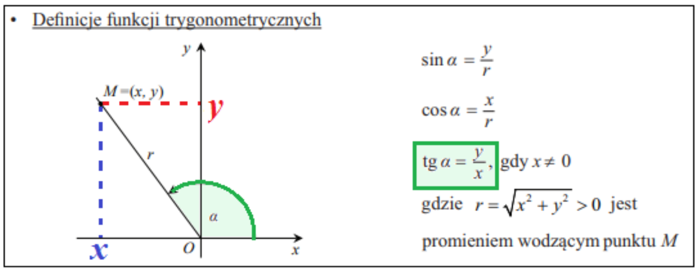
14.53.

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych. Punkt A symbolicznie zaznaczamy na dodatniej półosi x (rys. 1).



Oznaczamy kąt ABC literą α. Ponieważ **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta określa jego położenie, więc zaznaczamy kąt przy wierzchołku ***B*** (rys. 2).

Sytuacja jest podobna do rysunku **w karcie wzorów** (str. 15), zaznaczamy więc na osiach $\boldsymbol{x = -3}$ oraz $\boldsymbol{y = 2}$ (jak na rys. 3).



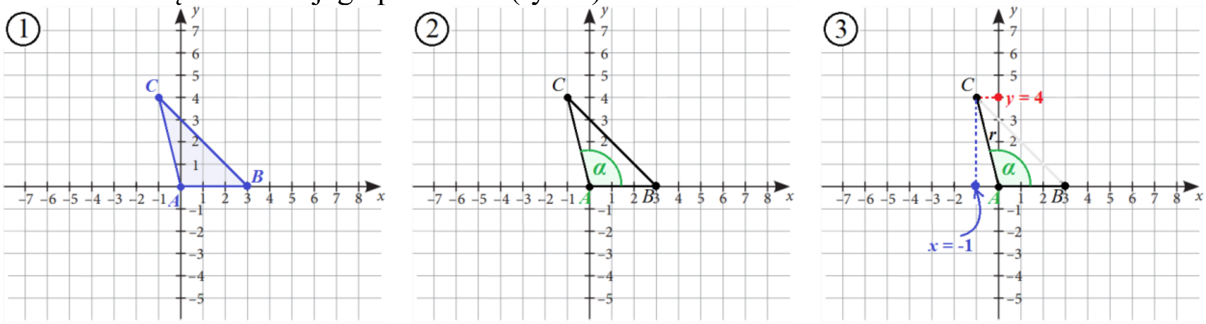
Korzystamy ze wzoru $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x}$.

Zatem $tg\,\alpha = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

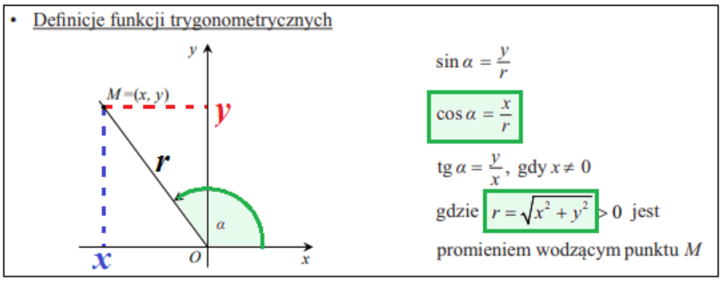
Odp. **D**

14.54.

Zaznaczamy punkty A, B, C w układzie współrzędnych i rysujemy trójkąt ABC (rys. 1). Oznaczamy kąt CAB literą α pamiętając o tym, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta określa jego położenie (rys. 2).



Sytuacja jest podobna do rysunku **w karcie wzorów** (str. 15), zaznaczamy więc na osiach $\boldsymbol{x = -1}$ oraz $\boldsymbol{y = 4}$ (jak na rys. 3).



Należy obliczyć $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$,

wcześniej licząc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

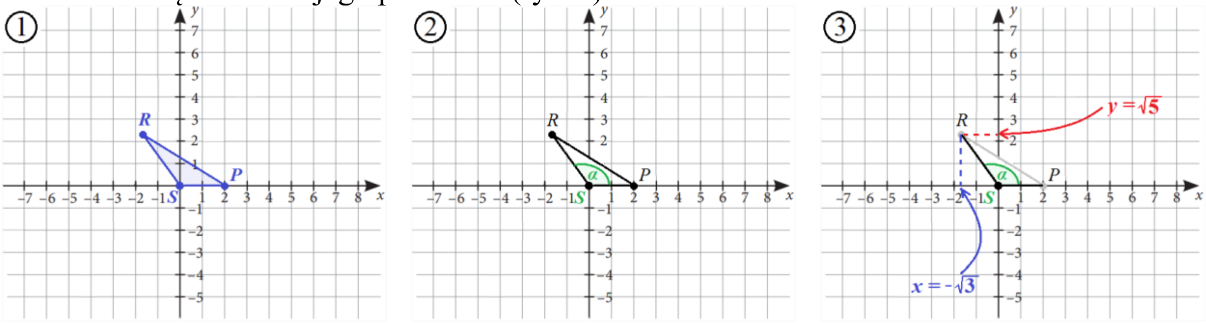
$r = \sqrt{(\mathbf{-1})^2 + \mathbf{4}^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$, zatem $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{17}}}$.

Usuwając niewymierność z mianownika, mamy $\dfrac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{17}}} \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = -\dfrac{\sqrt{\mathbf{17}}}{\mathbf{17}}$.

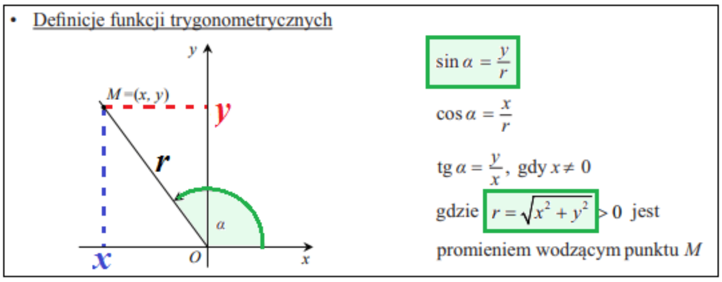
Odp. **A**

14.55.

Przybliżamy współrzędne punktu R, zatem $-\sqrt{3} \approx \mathbf{-1{,}73}$ oraz $\sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$, co pozwala narysować wszystkie podane punkty: P, R, S w układzie współrzędnych (rys. 1).
Oznaczamy kąt PSR literą α pamiętając o tym, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta określa jego położenie (rys. 2).



Sytuacja jest podobna do rysunku w **karcie wzorów** (str. 15), zaznaczamy więc na osiach $x = -\sqrt{3} \approx \mathbf{-1{,}73}$, $y = \sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$.



Należy obliczyć $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$,

wcześniej licząc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zatem $r \approx \sqrt{(\mathbf{-1{,}73})^2 + (\mathbf{2{,}24})^2} \approx \sqrt{2{,}99 + 5{,}02} = \sqrt{8{,}01} \approx \mathbf{2{,}83}$.

Dla $y \approx \mathbf{2{,}24}$, $r \approx \mathbf{2{,}83}$ obliczamy $\sin\alpha = \dfrac{y}{r} \approx \dfrac{2{,}24}{2{,}83} \approx \mathbf{0{,}79}$.

Korzystając z kalkulatora patrzymy, która z liczb proponowanych w odpowiedziach jest najbliższa rezultatowi **0,79**.

A. $-\dfrac{\sqrt{15}}{5} \approx -\dfrac{3{,}87}{5} = -0{,}774$

B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5} \approx \dfrac{2{,}24}{5} = 0{,}448$

C. $\dfrac{\sqrt{10}}{4} \approx \dfrac{3{,}16}{4} = \mathbf{0{,}79}$

D. $\dfrac{\sqrt{15}}{4} \approx \dfrac{3{,}87}{4} = 0{,}9675$.

Odp. **C**

14.56.

Rozwiązanie I:

Z jednego ze wzorów redukcyjnych (**karta wzorów**, str. 16) wynika, że $\sin^3(90° - \alpha) = \cos^3\alpha$.

- Wybrane wzory redukcyjne

$\boxed{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

Wśród wyrażeń proponowanych w odpowiedziach szukamy tego, które da się przekształcić do postaci $\cos^3\alpha$. Odrzucamy odp. **B**.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące równości:

$$\boxed{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha}$$

A: $1 - \sin^3\alpha = 1 - \sin\alpha \cdot \sin^2\alpha = 1 - \sin\alpha \cdot \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin^2\alpha} \neq \cos^3\alpha$

C:

$\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \underbrace{(1 - \sin^2\alpha)}_{\cos^2\alpha} =$

$= \sin\alpha - \sin\alpha + \sin^3\alpha = \sin^3\alpha \neq \cos^3\alpha$

D: $\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin^2\alpha} = \cos\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha = \boldsymbol{\cos^3\alpha}$.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Obliczamy wartość $\sin^3(90° - \alpha)$ dla **przykładowej wartości** kąta α, np. $\alpha = \mathbf{30°}$, po drodze korzystając z przybliżenia $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$.

$$\sin^3(90° - \alpha) = \sin^3(90° - \mathbf{30°}) = \sin^3(60°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \approx \left(\frac{\mathbf{1{,}73}}{2}\right)^3 = (0{,}865)^3 \approx \mathbf{0{,}647}.$$

Do **każdej** z odpowiedzi **podstawiamy konsekwentnie** $\alpha = \mathbf{30°}$ i korzystamy z $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

A:

$1 - \sin^3\alpha = 1 - \sin^3\mathbf{30°} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - 0{,}5^3 =$

$= 1 - 0{,}125 = 0{,}875$

B:

$1 - \cos^3\alpha = 1 - \cos^3\mathbf{30°} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \approx 1 - \left(\frac{1{,}73}{2}\right)^3 = 1 - (0{,}865)^3 = 1 - 0{,}647 = 0{,}353$

C:

$\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\mathbf{30°} - \sin\mathbf{30°} \cdot \cos^2\mathbf{30°} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \approx 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{1{,}73}{2}\right)^2 =$

$= 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}748 = 0{,}5 - 0{,}374 = 0{,}126$

D:

$$\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos\mathbf{30}^\circ - \cos\mathbf{30}^\circ \cdot \sin^2\mathbf{30}^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0{,}865 - 0{,}865 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}865 - 0{,}865 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}865 - 0{,}216 = \mathbf{0{,}649}$$

Okazało się, że wynik **0,649** z odp. **D** jest najbliższy rezultatowi **0,647**.
Oznacza to, że odp. **D** jest prawidłowa.

14.57.

Rozwiązanie I:

W wyrażeniu $\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ rozpisujemy $\cos^2\alpha=\left(1-\sin^2\alpha\right)$.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące równości:

$\boxed{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha}$

$\boxed{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha}$

Zatem:

$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha-\sin^3\alpha$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Obliczamy wyrażenie $\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ dla **przykładowej wartości** kąta α, np. $\alpha=\mathbf{30°}$.

W obliczeniach wykorzystujemy **przybliżenie** $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$

$$\cos 30^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}865}$$

$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin\mathbf{30°}\cdot\cos^2\mathbf{30°}\approx\mathbf{0{,}5}\cdot(\mathbf{0{,}865})^2\approx$

$\approx 0{,}5\cdot 0{,}748=\mathbf{0{,}374}$

Konsekwentnie podstawiając $\alpha=\mathbf{30°}$ oraz $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$, liczymy wartości wyrażeń z odpowiedzi.

Patrzymy, które z nich przyjmuje wartość **najbliższą 0,374**

A. $\cos^3\alpha-\cos\alpha=\cos^3\mathbf{30°}-\cos\mathbf{30°}\approx$
$\approx(\mathbf{0{,}865})^3-\mathbf{0{,}865}\approx 0{,}647-0{,}865=-0{,}218$.

B. $\sin\alpha-\sin^3\alpha=\sin\mathbf{30°}-\sin^3\mathbf{30°}\approx\mathbf{0{,}5}-(\mathbf{0{,}5})^3=0{,}5-0{,}125=\mathbf{0{,}375}$.

C. $\cos^2\alpha-1=\cos^2\mathbf{30°}-1=(\mathbf{0{,}865})^2-1\approx 0{,}748-1=-0{,}252$.

D. $\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\mathbf{30°}\cdot\cos\mathbf{30°}\approx(\mathbf{0{,}5})^2\cdot\mathbf{0{,}865}=0{,}25\cdot 0{,}865=0{,}21625$.

Okazało się, że **najbliżej** rezultatu **0,374** jest liczba **0,375**, uzyskana w odp. **B**.

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

14.58.
Rozwiązanie I:
Wykorzystując wzór redukcyjny
(**karta wzorów**, str. 16)
oraz własność $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$,

- Wybrane wzory redukcyjne

$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

upraszczamy wyrażenie:

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące równości:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\underbrace{\sin(90^\circ - \alpha)}_{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^2\alpha =$$
$$= 1 - \sin^2\alpha = (1 - \sin\alpha) \cdot (1 + \sin\alpha)$$

Odp. **C**

Uwaga! Przy końcowym przejściu, z $1 - \sin^2\alpha$ do $(1 - \sin\alpha) \cdot (1 + \sin\alpha)$, potraktowano $1 - \sin^2\alpha$ jako $1^2 - \sin^2\alpha$, dzięki czemu wykorzystano **wzór skróconego mnożenia** $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

Rozwiązanie II:
Obliczamy wyrażenie $\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha$ dla **przykładowej wartości** kąta α, np. $\alpha = \mathbf{30^\circ}$.
W obliczeniach wykorzystujemy **przybliżenie** $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$.

$$\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha = \sin(90^\circ - \mathbf{30^\circ}) \cdot \cos\mathbf{30^\circ} \approx$$
$$\approx \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0{,}865 \cdot 0{,}865 \approx \mathbf{0{,}748}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$
$$\sin 60^\circ \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}865}$$
$$\cos 30^\circ \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0{,}865}$$
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

Konsekwentnie podstawiając $\alpha = \mathbf{30^\circ}$ oraz $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$, liczymy wartości wyrażeń z odpowiedzi.

Patrzymy, które z nich przyjmuje wartość **najbliższą 0,748**

A. $\sin^2\alpha = \sin^2\mathbf{30^\circ} = (\mathbf{0{,}5})^2 = 0{,}25$

B. $\sin^2\alpha - 1 = \sin^2\mathbf{30^\circ} - 1 = (\mathbf{0{,}5})^2 - 1 = 0{,}25 - 1 = -0{,}75$

C. $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = (1 - \sin\mathbf{30^\circ}) \cdot (1 + \sin\mathbf{30^\circ}) = (1 - \mathbf{0{,}5}) \cdot (1 + \mathbf{0{,}5}) = 0{,}5 \cdot 1{,}5 = \mathbf{0{,}75}$

D.
$(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = (1 - \cos\mathbf{30^\circ}) \cdot (1 + \cos\mathbf{30^\circ}) \approx (1 - \mathbf{0{,}865}) \cdot (1 + \mathbf{0{,}865}) = 0{,}135 \cdot 1{,}865 \approx 0{,}25$.

Najbliżej rezultatu **0,748** jest liczba **0,75**, uzyskana w odp. **C** – to ta odp. jest poprawna.

14.59.

Rozwiązanie I:

Wykorzystując wzory redukcyjne (**karta wzorów**, str. 16) upraszczamy wyrażenie.

- Wybrane wzory redukcyjne

$\boxed{\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha}$ $\quad\boxed{\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha}$

$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

Zatem:

$$W=\sin\alpha\cdot\underbrace{\cos(90^\circ-\alpha)}_{\sin\alpha}+\cos\alpha\cdot\underbrace{\sin(90^\circ-\alpha)}_{\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{jedynka\,trygonometryczna}=\mathbf{1}$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Obliczamy wartość wyrażenia W dla **przykładowej wartości** kąta α, np. $\alpha=\mathbf{30^\circ}$.

W obliczeniach wykorzystujemy **przybliżenie** $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$

$$\sin 60^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}865}$$

$$\cos 30^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}865}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$

$$W=\sin\alpha\cdot\cos(90^\circ-\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin(90^\circ-\alpha)=$$
$$=\sin\mathbf{30^\circ}\cdot\cos(90^\circ-\mathbf{30^\circ})+\cos\mathbf{30^\circ}\cdot\sin(90^\circ-\mathbf{30^\circ})=$$
$$=\sin 30^\circ\cdot\cos 60^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ\approx$$
$$\approx 0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}865\cdot 0{,}865\approx 0{,}25+0{,}748=\mathbf{0{,}998}$$

Konsekwentnie podstawiając $\alpha=\mathbf{30^\circ}$ oraz $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$, liczymy wartości wyrażeń z odpowiedzi A, B i D.

Patrzymy, które z nich przyjmuje wartość **najbliższą 0,998**

A.
$$2(\sin\alpha+\cos\alpha)=2\cdot(\sin\mathbf{30^\circ}+\cos\mathbf{30^\circ})\approx$$
$$\approx 2\cdot(\mathbf{0{,}5}+\mathbf{0{,}865})=2\cdot 1{,}365=2{,}73$$

B. $2(\sin\alpha-\cos\alpha)=2\cdot(\sin\mathbf{30^\circ}-\cos\mathbf{30^\circ})\approx 2\cdot(\mathbf{0{,}5}-\mathbf{0{,}865})=2\cdot(-0{,}365)=-0{,}73$

C. **1**

D. $\sin 2\alpha=\sin(2\cdot\mathbf{30^\circ})=\sin 60^\circ\approx 0{,}865$.

Okazało się, że spośród wyników w odpowiedziach, najbliżej rezultatu **0,998** jest liczba **1**, która znajduje się w odp. **C**

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

14.60.

Rozwiązanie I:

W obliczeniach wykorzystujemy **wzór skróconego mnożenia** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ oraz **jedynkę trygonometryczną** $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$9-(3\sin\alpha-3\cos\alpha)^2=9-\left(9\sin^2\alpha-2\cdot3\sin\alpha\cdot3\cos\alpha+9\cos^2\alpha\right)=$$
$$=9-\left(9\sin^2\alpha-18\sin\alpha\cdot\cos\alpha+9\cos^2\alpha\right)=9-\left(9\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha-18\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)=$$
$$=9-\left[9\underbrace{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}_{1}-18\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right]=9-[9-18\sin\alpha\cdot\cos\alpha]=9-9+18\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$$
$$=\mathbf{18\sin}\alpha\cdot\mathbf{cos}\alpha$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Obliczamy wartość $9-(3\sin\alpha-3\cos\alpha)^2$ dla **przykładowej** wartości α, np. $\alpha=\mathbf{30°}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\mathbf{0{,}5}$$
$$\cos 30^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\mathbf{0{,}865}$$

Dzięki zastosowaniu przybliżenia $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$, <u>**nie stosujemy**</u> w obliczeniach **wzorów skróconego mnożenia**, tylko zasady kolejności działań.

$$9-(3\sin\mathbf{30°}-3\cos\mathbf{30°})^2\approx$$
$$\approx9-(3\cdot\mathbf{0{,}5}-3\cdot\mathbf{0{,}865})^2=9-(1{,}5-2{,}595)^2=$$
$$=9-\underbrace{(-1{,}095)^2}_{\approx\mathbf{1{,}199}}\approx9-(\mathbf{1{,}199})=9-1{,}199=\mathbf{7{,}801}$$

Konsekwentnie podstawiając $\alpha=\mathbf{30°}$ oraz $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$, liczymy wartości wyrażeń proponowanych w odpowiedziach. Oceniamy, które z nich ma wartość najbliższą **7,801**.

A. $6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)=6\cdot\left(\cos^2\mathbf{30°}-\sin^2\mathbf{30°}-2\cdot\sin\mathbf{30°}\cdot\cos\mathbf{30°}\right)=$
$=6\cdot\left[(\mathbf{0{,}865})^2-(\mathbf{0{,}5})^2-2\cdot\mathbf{0{,}5}\cdot\mathbf{0{,}865}\right]\approx6\cdot[0{,}748-0{,}25-0{,}865]=6\cdot(-0{,}367)=-2{,}202$

B. $9\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)=9\cdot\left(\cos^2\mathbf{30°}-\sin^2\mathbf{30°}-2\cdot\sin\mathbf{30°}\cdot\cos\mathbf{30°}\right)=$
$=9\cdot\left[(\mathbf{0{,}865})^2-(\mathbf{0{,}5})^2-2\cdot\mathbf{0{,}5}\cdot\mathbf{0{,}865}\right]\approx9\cdot[0{,}748-0{,}25-0{,}865]=9\cdot(-0{,}367)=-3{,}303$

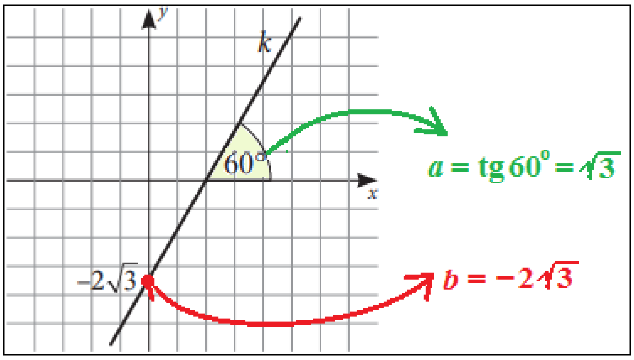
C. $9\sin\alpha\cdot\cos\alpha=9\cdot\sin\mathbf{30°}\cdot\cos\mathbf{30°}\approx9\cdot0{,}5\cdot0{,}865=3{,}8925$

D. $18\sin\alpha\cdot\cos\alpha=18\cdot\sin\mathbf{30°}\cdot\cos\mathbf{30°}\approx18\cdot0{,}5\cdot0{,}865=\mathbf{7{,}785}$

Najbliżej rezultatu **7,801** jest wynik **7,785**, uzyskany w odp. **D** – która jest poprawna.

14.61.

Równanie prostej k ma postać $\boldsymbol{y = ax + b}$.



Należy znaleźć wartości ***a*** i ***b***.

Z rysunku odczytujemy $\alpha = 60°$.

Dla $\alpha = 60°$ korzystamy ze wzoru
$a = tg\,\alpha$ (**karta wzorów**, str. 5):

$a = tg\,60° = \sqrt{\mathbf{3}}$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

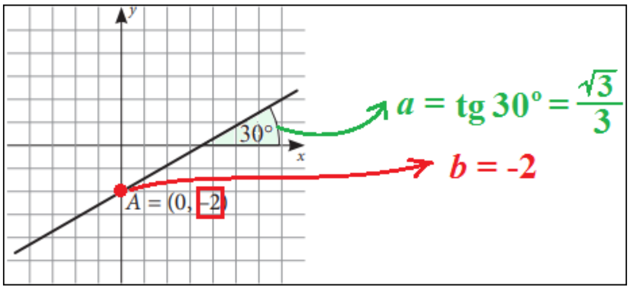
b – punkt przecięcia prostej k z osią y, więc z rysunku wynika że $b = -2\sqrt{3}$.

Wstawiamy $a = \sqrt{3}$ oraz $b = -2\sqrt{3}$ do wzoru
$\boldsymbol{y = ax + b}$

Równanie prostej k ma postać $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$.

Odp. **A**

14.62.



Wzór funkcji ma postać $f(x) = \boldsymbol{a}\mathbf{x} + \boldsymbol{b}$.

Należy znaleźć wartości $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Z rysunku odczytujemy $\alpha = 30°$.

Dla $\alpha = 30°$ korzystamy ze wzoru $a = tg\,\alpha$ (**karta wzorów**, str. 5):

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$a = tg\,30° = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

b – punkt przecięcia wykresu funkcji z osią y, więc z rysunku wynika że $\boldsymbol{b = -2}$.

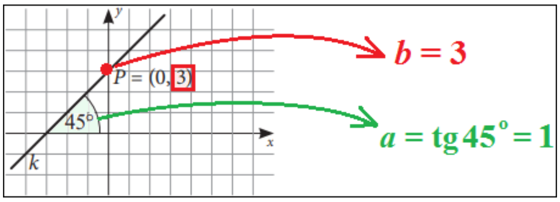
Wstawiamy $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $b = -2$

do wzoru $f(x) = \boldsymbol{a}\mathbf{x} + \boldsymbol{b}$. Otrzymujemy $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$.

Odp. **B**

14.63.

Równanie prostej *k* ma postać $\boldsymbol{y = ax + b}$.



Należy znaleźć wartości $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Z rysunku odczytujemy $\alpha = 45°$.

Dla $\alpha = 45°$ korzystamy ze wzoru $a = tg\,\alpha$ (**karta wzorów**, str. 5):

$a = tg\,45° = \mathbf{1}$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

b – punkt przecięcia prostej *k* z osią *y*, więc z rysunku wynika że $\boldsymbol{b = 3}$.

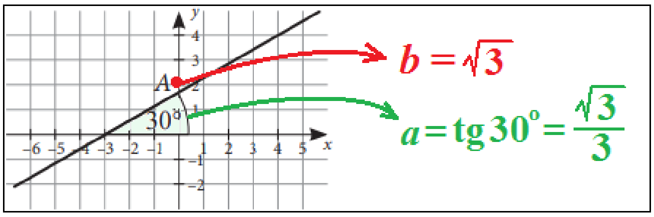
Wstawiamy $a = 1$ oraz $b = 3$ do wzoru $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Równanie prostej *k* ma postać $y = 1x + 3$, czyli $y = x + 3$.

Odp. **C**

14.64.

Wzór funkcji ma postać $f(x) = \boldsymbol{a}\mathbf{x} + \boldsymbol{b}$.



Należy znaleźć wartości $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Z rysunku odczytujemy $\alpha = 30°$.

Dla $\alpha = 30°$ korzystamy ze wzoru $a = tg\,\alpha$ (**karta wzorów**, str. 5):

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

$$a = tg\,30° = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

b – punkt przecięcia wykresu funkcji z osią y.

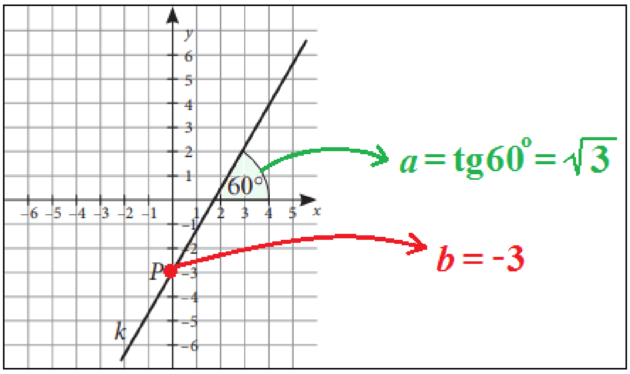
Ponieważ ma on współrzędne $A = \left(0, \sqrt{3}\right)$, to $b = \sqrt{\mathbf{3}}$.

Odp. **D**

14.65.

Równanie prostej k ma postać $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Należy znaleźć wartości $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.



Z rysunku odczytujemy $\alpha = 60°$.

Dla $\alpha = 60°$ korzystamy ze wzoru $a = tg\,\alpha$ (**karta wzorów**, str. 5):

$a = tg\,60° = \sqrt{3}$

b – punkt przecięcia prostej k z osią y, więc z rysunku wynika że $\boldsymbol{b = -3}$.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Wstawiamy $a = \sqrt{3}$ oraz $b = -3$ do wzoru $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Równanie prostej k ma postać $y = \sqrt{3}\,x - 3$.

Odp. **B**

14.66.

Równanie $3x-4y-2=0$ należy przekształcić do postaci $\boldsymbol{y = ax + b}$.

$3x-4y-2=0$

$-4y=-3x+2 \qquad |:(-1)$

$4y=3x-2 \qquad |:4$

$y=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}x-\frac{2}{4}$

Zatem $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{2}{4}$. Wiadomo, że $a=tg\,\alpha$, więc szukany $tg\,\alpha=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

Odp. **D**

14.67.

Równanie $12x-5y+19=0$ należy przekształcić do postaci $\boldsymbol{y = ax + b}$.

$12x-5y+19=0$

$-5y=-12x-19 \qquad |:(-1)$

$5y=12x+19 \qquad |:5$

$y=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}x+\frac{19}{5}$

Zatem $a=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$, $b=\frac{19}{5}$. Wiadomo, że $a=tg\,\alpha$, więc szukany $tg\,\alpha=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$.

Odp. **C**

14.68.

Równanie $4-x+y=0$ należy przekształcić do postaci $\boldsymbol{y = ax + b}$.

$4-x+y=0$

$y=x-4$

$y=\mathbf{1}x-4$

Zatem $a=\mathbf{1}$, $b=-4$. Wiadomo, że $a=tg\,\alpha$, więc szukany $tg\,\alpha=\mathbf{1}$.

Odp. **A**

14.69.

Równanie $2x-3y+4=0$ należy przekształcić do postaci $\boldsymbol{y = ax + b}$.

$-3y=-2x-4 \qquad |:(-1)$

$3y=2x+4 \qquad |:3$

$y=\mathbf{\frac{2}{3}}x+\frac{4}{3}$

Zatem $a=\mathbf{\frac{2}{3}}$, $b=\frac{4}{3}$. Wiadomo, że $a=tg\,\alpha$, więc szukany $tg\,\alpha=\mathbf{\frac{2}{3}}$.

Odp. **B**

14.70.

Traktując wzór funkcji jako postać kierunkową $f(x) = \boldsymbol{ax + b}$, mamy $\boldsymbol{a = 4}$ oraz $b = -2$
Wiadomo, że $a=tg\,\alpha$, więc szukany $tg\,\alpha=\mathbf{4}$.

Odp. **C**

14.71.

Traktując równanie prostej jako postać kierunkową $\boldsymbol{y = ax + b}$, mamy $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{9}$.

Wiadomo, że $a = tg\,\alpha$, więc $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymujemy $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Umiejętnie wykorzystując tabelę wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 15) wnioskujemy, że jeśli $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to $\alpha = 30°$ i wówczas prawdą jest, że $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ oraz $\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Odpowiedzi $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ nie ma, ale istotne jest to, że $\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Odp. **B**

14.72.

Traktując równanie prostej jako postać kierunkową $\boldsymbol{y = ax + b}$, mamy $a = \sqrt{3}$ oraz $b = -2$.

Wiadomo, że $a = tg\,\alpha$, więc $tg\,\alpha = \boldsymbol{\sqrt{3}}$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Wykorzystujemy tabelę z wartościami funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 15):

$tg\,\alpha = \boldsymbol{\sqrt{3}}$, gdy $\alpha = 60°$.

Wówczas prawdą jest, że $\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

Odp. **C**

14.73.

Równanie prostej zapisujemy jako $y = 1x - 0{,}8$, więc odczytujemy $\boldsymbol{a = 1}$ oraz $b = -0{,}8$.

Wiadomo, że $a = tg\,\alpha$, zatem $tg\,\alpha = 1$.

Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 15) wnioskujemy, że jeśli $tg\,\alpha = 1$, to $\alpha = 45°$, wówczas $\sin\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

α	$0°$	$30°$	$\boxed{45°}$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\boxed{1}$	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Odp. **B**

14.74.

Traktując wzór funkcji jako postać kierunkową $f(x) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, mamy $a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, $b = \sqrt{3}$.

Wiadomo, że $a = tg\,\alpha$, zatem $tg\,\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 15) wnioskujemy, że jeśli $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to $\alpha = 30°$, wówczas $\sin\alpha = \frac{1}{2} = \boldsymbol{0{,}5}$ oraz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. W kontekście tego zadania istotne jest, że $\sin\alpha = \frac{1}{2} = \boldsymbol{0{,}5}$.

α	$0°$	$\boxed{30°}$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha}$	0	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Odp. **A**

14.75.
Równanie prostej zapisujemy jako $y = \mathbf{1}x + \mathbf{0}$, więc odczytujemy $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ oraz $b = 0$.

Wiadomo, że $a = tg\,\alpha$, zatem $tg\,\alpha = 1$.

Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (**karta wzorów**, str. 15) wnioskujemy, że jeśli $tg\,\alpha = 1$, to $\alpha = 45°$, wówczas $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

α	$0°$	$30°$	$\boxed{45°}$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\boxed{1}$	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Odp. **B**