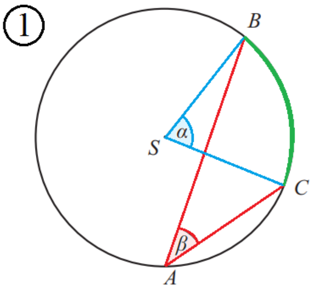
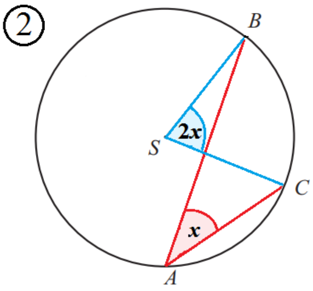
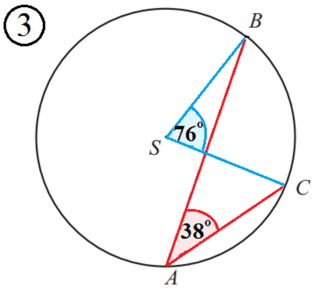
15.1.
Kąt środkowy α oraz kąt wpisany β są oparte na tym samym łuku *BC* (rys. 1).







Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, które podano w ramce obok. W ten sposób mamy $\alpha = 2x$ oraz $\beta = x$ (rys. 2), które podstawiamy do równania $\alpha + \beta = 114°$.

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

$\alpha + \beta = 114°$

$2x + x = 114°$

$3x = 114° \qquad |:3$

$x = \mathbf{38°}$

Zatem $\alpha = \mathbf{2 \cdot 38° = 76°}$ oraz $\beta = \mathbf{38°}$ (rys. 3).

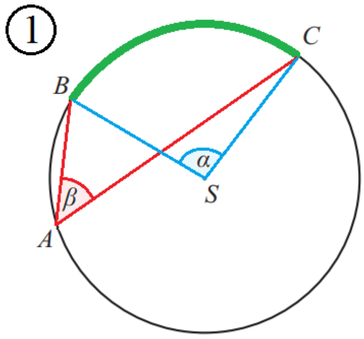
Obliczamy szukane $\alpha + 0{,}5\beta$, zatem $\alpha + 0{,}5\beta = 76° + 0{,}5 \cdot 38° = 76° + 19° = \mathbf{95°}$.

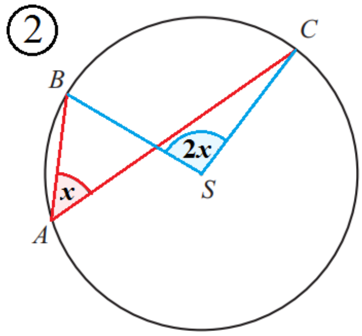
Odp. **D**

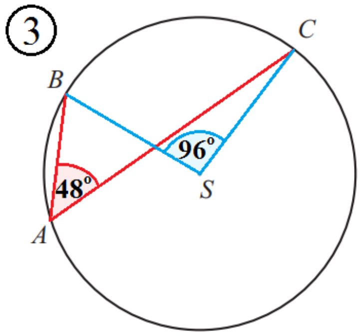
15.2.

Z treści zadania wynika, że $\alpha + \beta = 144°$.

Kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$ oraz kąt wpisany $\boldsymbol{\beta}$ są oparte na tym samym łuku BC (rys. 1).







Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, które podano w ramce obok. W ten sposób mamy $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2x}$ oraz $\boldsymbol{\beta = x}$ (rys. 2), które podstawiamy do równania $\alpha + \beta = 144°$.

> Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

$\alpha + \beta = 144°$

$2x + x = 144°$

$3x = 144° \qquad |:3$

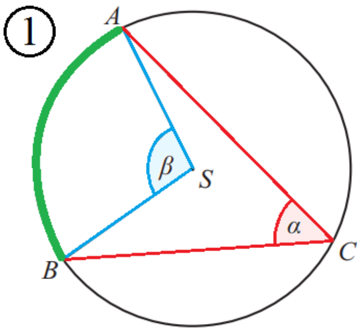
$x = \mathbf{48°}$

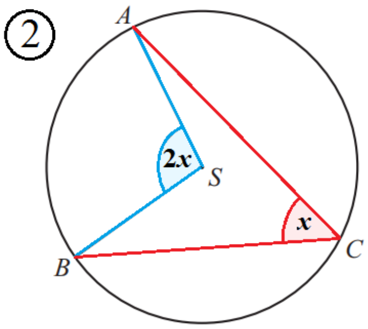
Zatem $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2 \cdot 48° = 96°}$ oraz $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{48°}$ (rys. 3).

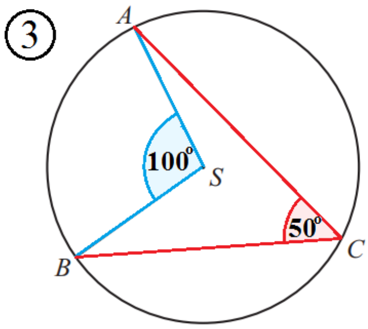
Spośród odpowiedzi prawdą jest, że $\alpha = 96°$.

Odp. **D**

15.3.
Kąt środkowy ***β*** oraz kąt wpisany ***α*** są oparte na tym samym łuku *AB* (rys. 1).







Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, które podano w ramce obok. W ten sposób mamy $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2x}$ oraz $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$ (rys. 2), które podstawiamy do równania $\alpha + \beta = 150°$.

> Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

$$\alpha + \beta = 150°$$
$$2x + x = 150°$$
$$3x = 150° \qquad |:3$$
$$x = \mathbf{50°}$$

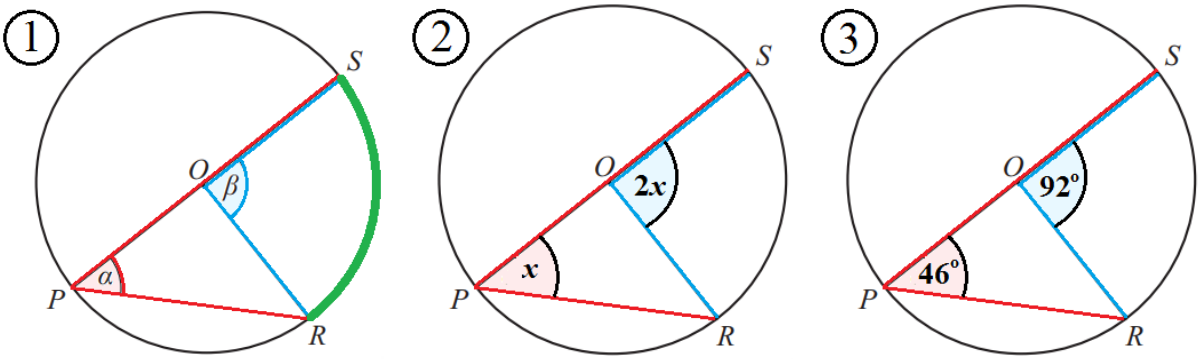
Zatem $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{50°}$ oraz $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2 \cdot 50° = 100°}$ (rys. 3).

Spośród odpowiedzi prawdą jest, że $\beta = \mathbf{100°}$.

Odp. **C**

15.4.

Kąt środkowy $\boldsymbol{\beta}$ oraz kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ są oparte na tym samym łuku *RS* (rys. 1).



Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, które podano w ramce obok. W ten sposób mamy $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2x}$ oraz $\boldsymbol{\alpha = x}$ (rys. 2), które podstawiamy do równania $\alpha + \beta = 138^\circ$.

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

$\alpha + \beta = 138^\circ$

$2x + x = 138^\circ$

$3x = 138^\circ \qquad |:3$

$x = \mathbf{46^\circ}$

Zatem $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{46^o}$ oraz $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2 \cdot 46^o = 92^o}$ (rys. 3).

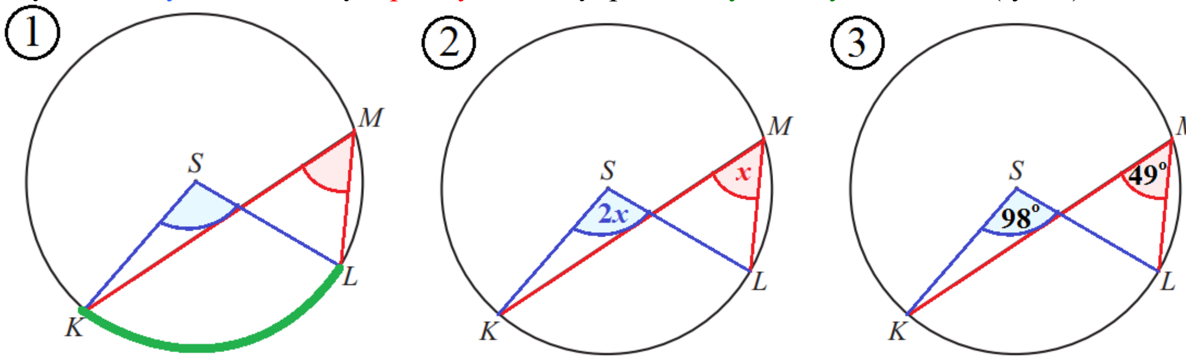
Obliczamy $\beta - \dfrac{\alpha}{2} = 92^\circ - \dfrac{46^\circ}{2} = 92^\circ - 23^\circ = \mathbf{69}^\circ$.

Odp. **D**

15.5.

Z treści zadania wynika, że $|\angle KSL| + |\angle KML| = 147°$.

Kąt środkowy ***KSL*** oraz kąt wpisany ***KML*** są oparte na tym samym łuku *KL* (rys. 1).



Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, które podano w ramce obok. W ten sposób mamy kąt *KSL* = **2*x*** oraz kąt *KML* **= *x*** (rys. 2), które podstawiamy do równania $|\angle KSL| + |\angle KML| = 147°$.

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

$|\angle KSL| + |\angle KML| = 147°$

$2x + x = 147°$

$3x = 147° \qquad |:3$

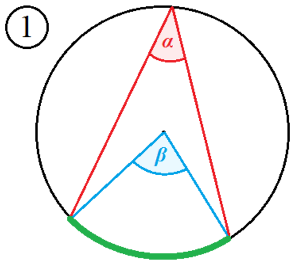
$x = \mathbf{49°}$

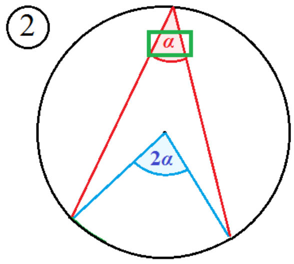
Zatem kąt *KML* = **49°** oraz kąt *KSL* = **2·49° = 98°** (rys. 3).

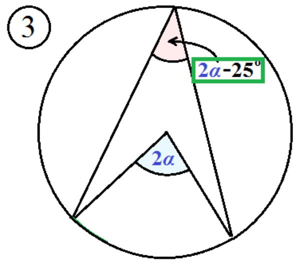
Miara kąta *KSL* wynosi **98°**.

Odp. **A**

15.6.







Kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ oraz kąt środkowy $\boldsymbol{\beta}$ są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy $\boldsymbol{\beta = 2\alpha}$ (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt wpisany jest o **25° mniejszy** od kąta środkowego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta wpisanego na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $\alpha = 2\alpha - 25°$.

$\alpha = 2\alpha - 25°$

$\alpha - 2\alpha = -25°$

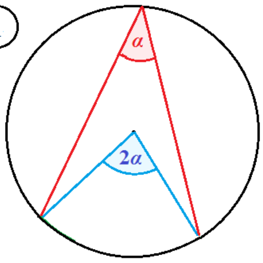
$-\alpha = -25°$

$\boldsymbol{\alpha = 25°}$, wówczas $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2 \cdot 25° = 50°}$. Zatem $\alpha + \beta = 25° + 50° = \mathbf{75°}$.

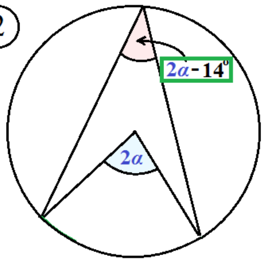
Odp. **A**

15.7.

1



2



Korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok.
Wprowadzamy oznaczenia kątów (rys. 1).

> Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt wpisany jest o **14° mniejszy** od kąta środkowego (rys. 2).

Na rys. 1 kąt wpisany to ***α***, zaś na rys. 2 **ten sam** kąt wpisany to **2*α* – 14°**. Zatem:

$\alpha = 2\alpha - 14°$

$\alpha - 2\alpha = -14°$

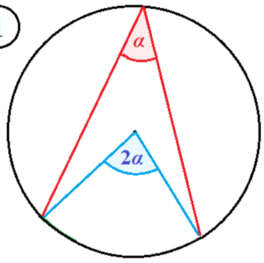
$-\alpha = -14°$

α = **14°** , wówczas **2*α*** = **2·14° = 28°**. Zatem $\alpha + 2\alpha = 14° + 28° = \mathbf{42}°$.

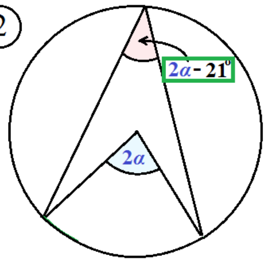
Odp. **D**

15.8.

1



2



Korzystamy z twierdzenia w ramce widocznej obok.
Wprowadzamy oznaczenia kątów (rys. 1).

> Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt wpisany jest o **21°** **mniejszy** od kąta środkowego (rys. 2).

Na rys. 1 kąt wpisany to $\boldsymbol{\alpha}$, zaś na rys. 2 **ten sam** kąt to $\mathbf{2\boldsymbol{\alpha} - 21^\circ}$. Zatem:

$$\alpha = 2\alpha - 21^\circ$$

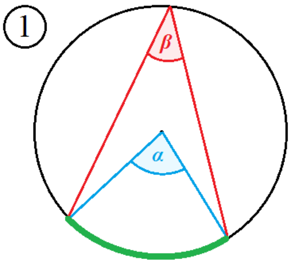
$$\alpha - 2\alpha = -21^\circ$$

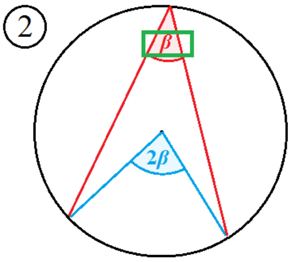
$$-\alpha = -21^\circ$$

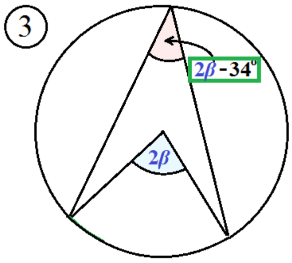
$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{21^\circ}$, wówczas kąt środkowy ma miarę $\mathbf{2\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{2 \cdot 21^\circ = 42^\circ}$.

Odp. **C**

15.9.







Kąt środkowy α oraz wpisany β są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy $\boldsymbol{\alpha = 2\beta}$ (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt wpisany jest o **34° mniejszy** od kąta środkowego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta wpisanego na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $\beta = 2\beta - 34^\circ$.

$\beta = 2\beta - 34^\circ$

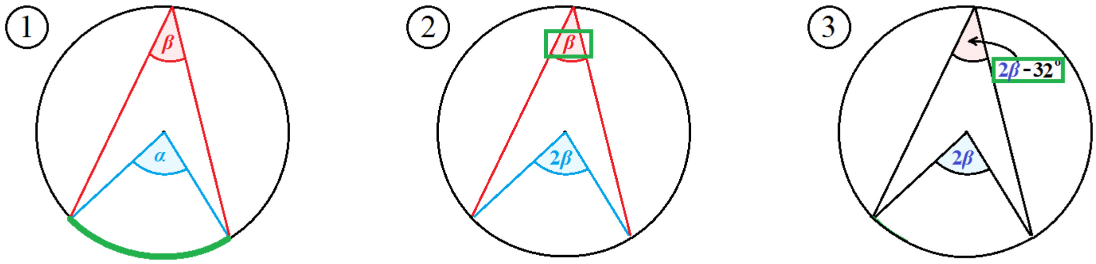
$\beta - 2\beta = -34^\circ$

$-\beta = -34^\circ$

$\boldsymbol{\beta = 34^\circ}$.

Odp. **B**

15.10.



Kąt środkowy ***α*** oraz wpisany ***β*** są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy ***α* = 2*β*** (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt wpisany jest o **32º mniejszy** od kąta środkowego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta wpisanego na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $\beta = 2\beta - 32°$.

$\beta = 2\beta - 32°$

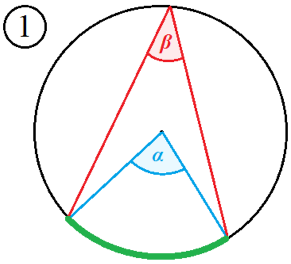
$\beta - 2\beta = -32°$

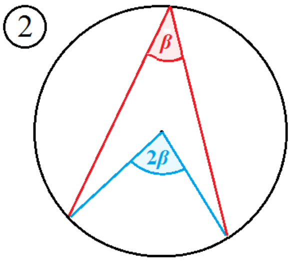
$-\beta = -32°$

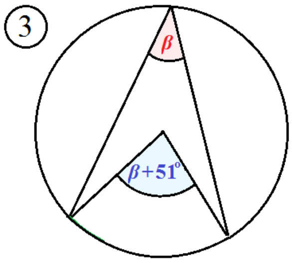
$\boldsymbol{\beta}$ = **32º** . Oznacza to, że **szukany** kąt α = **2*β* = 2·32º = 64º**.

Odp. **D**

15.11.







Kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$ oraz wpisany $\boldsymbol{\beta}$ są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy $\boldsymbol{\alpha = 2\beta}$ (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt środkowy jest o **51° większy** od kąta wpisanego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta **środkowego** na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $2\beta = \beta + 51°$.

$2\beta = \beta + 51°$

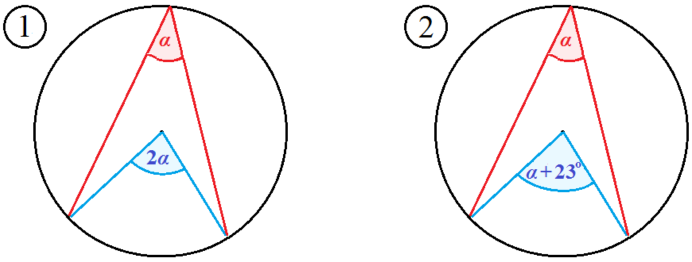
$2\beta - \beta = 51°$

$\boldsymbol{\beta = 51°}$. Wówczas kąt $\alpha = \boldsymbol{2\beta = 2 \cdot 51° = 102°}$.

Średnia arytmetyczna $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{51° + 102°}{2} = \dfrac{153°}{2} = \mathbf{76{,}5°}$.

Odp. **C**

15.12.



Kąt środkowy 2α oraz wpisany α są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt środkowy jest o **23° większy** od kąta wpisanego α (rys. 2).

Porównując oznaczenia kąta **środkowego** na rysunkach 1 i 2, mamy równanie $2\alpha=\alpha+23^{\circ}$.

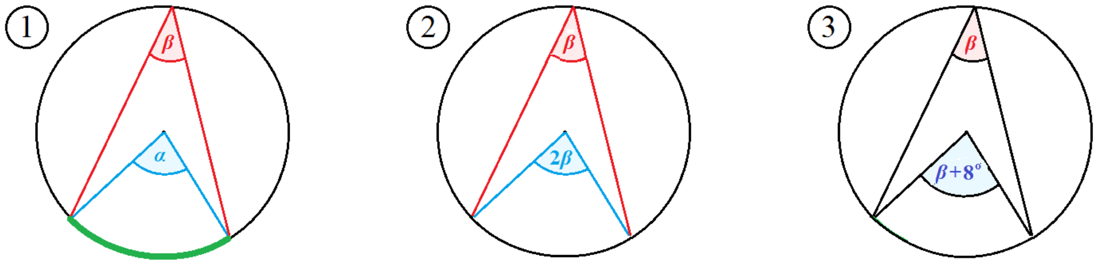
$2\alpha=\alpha+23^{\circ}$

$2\alpha-\alpha=23^{\circ}$

$\boldsymbol{\alpha=23^{\circ}}$

Odp. **B**

15.13.



Kąt środkowy ***α*** oraz wpisany ***β*** są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy ***α = 2β*** (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt środkowy jest o **8°** **większy** od kąta wpisanego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta **środkowego** na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $2\beta = \beta + 8°$.

$2\beta = \beta + 8°$

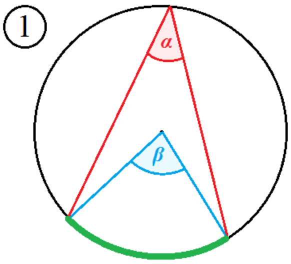
$2\beta - \beta = 8°$

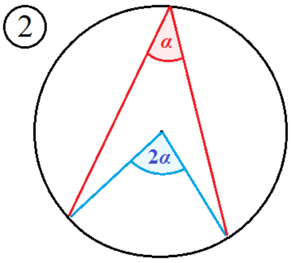
β = **8°** . Wówczas kąt ***α*** = **2*β* = 2·8° = 16°**.

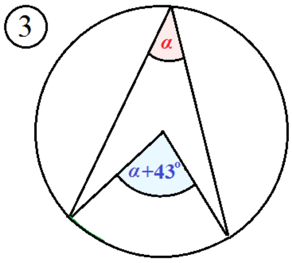
Suma miar kątów $\alpha + \beta = 16° + 8° = \mathbf{24°}$.

Odp. **A**

15.14.







Kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ oraz środkowy $\boldsymbol{\beta}$ są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy $\boldsymbol{\beta = 2\alpha}$ (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt środkowy jest o **43° większy** od kąta wpisanego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta **środkowego** na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $2\alpha = \alpha + 43°$.

$2\alpha = \alpha + 43°$

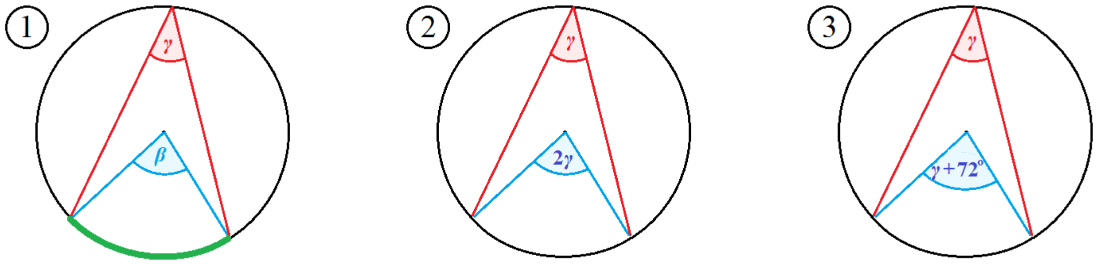
$2\alpha - \alpha = 43°$

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{43°}$. Wówczas kąt $\boldsymbol{\beta} =$ $\boldsymbol{2\alpha} = \mathbf{2 \cdot 43° = 86°}$.

Suma miar kątów $\alpha + \beta = 43° + 86° = \mathbf{129}° > 125°$.

Odp. **D**

15.15.



Kąt wpisany γ oraz środkowy β są oparte na tym samym łuku okręgu (rys. 1).
Z twierdzenia w ramce obok mamy $\beta = 2\gamma$ (rys. 2).

Kąt środkowy jest **2 razy większy** od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku okręgu

Z treści zadania, kąt środkowy jest o **72° większy** od kąta wpisanego (rys. 3).

Porównując oznaczenia kąta **środkowego** na rysunkach 2 i 3, mamy równanie $2\gamma = \gamma + 72°$.

$2\gamma = \gamma + 72°$

$2\gamma - \gamma = 72°$

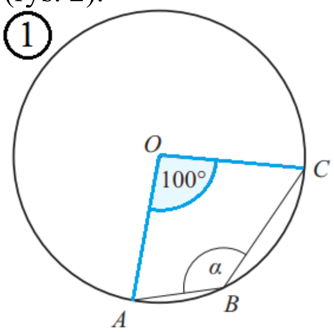
$\gamma = 72°$. Wówczas kąt $\beta = 2\gamma = 2 \cdot 72° = 144°$.

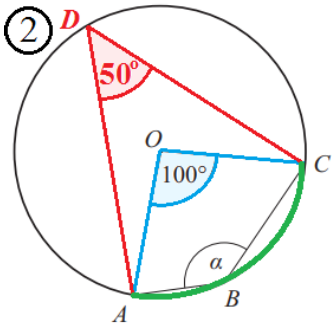
Średnia arytmetyczna miar kątów $\bar{x} = \dfrac{\beta + \gamma}{2} = \dfrac{144° + 72°}{2} = \mathbf{108}°$.

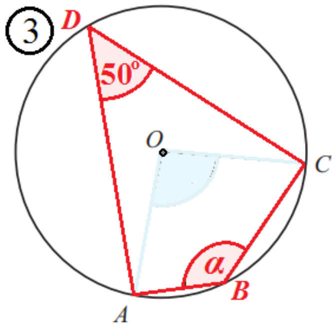
Odp. **C**

15.16.

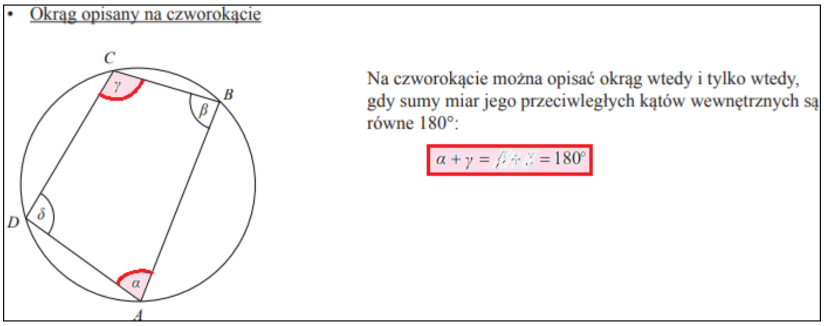
Kąt $|\angle AOC| = 100°$ jest kątem środkowym (rys. 1). Dorysowujemy kąt wpisany oparty na tym samym łuku AC, co kąt środkowy $\angle AOC$ – więc jest **2 razy mniejszy** od kąta $\angle AOC$ (rys. 2).







Sytuacja, w której na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg (rys. 3), pozwala nam (z użyciem **karty wzorów**, str. 12) w łatwy sposób wyznaczyć miarę kąta α.

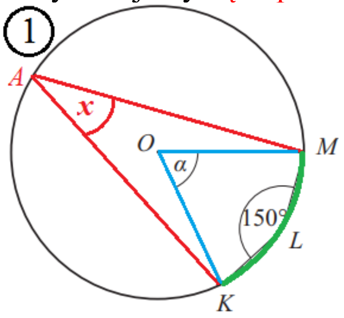


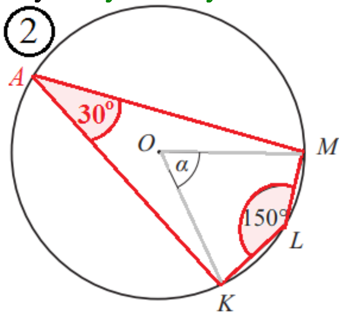
$\alpha + 50° = 180°$, więc
$\alpha = \mathbf{130°}$.

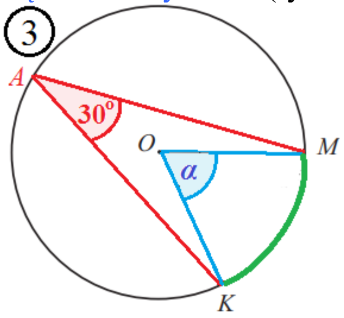
Odp. **D**

15.17.

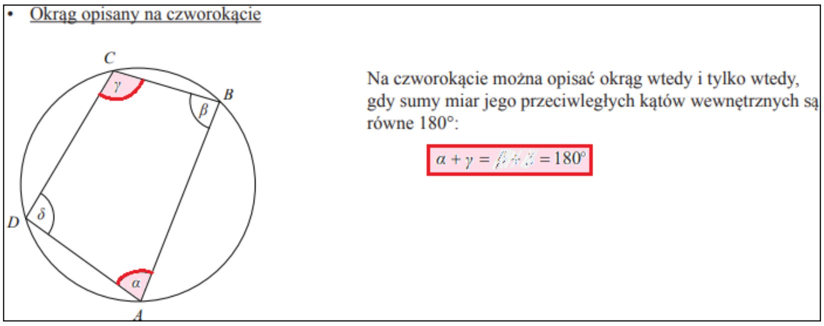
Dorysowujemy kąt wpisany oparty na tym samym łuku KM, co kąt środkowy KOM (rys. 1).







Sytuacja, w której na czworokącie $AKLM$ opisano okrąg (rys. 2), pozwala nam (z użyciem **karty wzorów**, str. 12) w łatwy sposób wyznaczyć miarę kąta $\boldsymbol{x} = \mathbf{30^o}$.



- Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

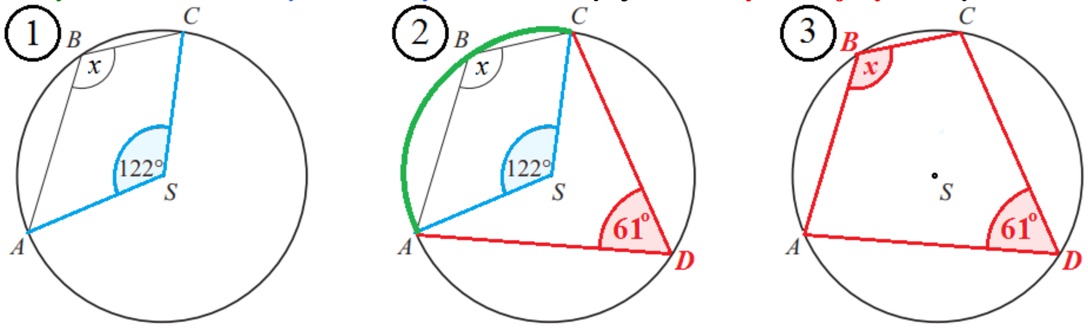
Kąt środkowy KOM jest oparty na tym samym łuku KM, co kąt wpisany $KAM = \mathbf{30^o}$ (rys. 3), więc jest **2 razy większy**.

Zatem $\alpha = 2 \cdot 30^\circ = \mathbf{60^\circ}$.

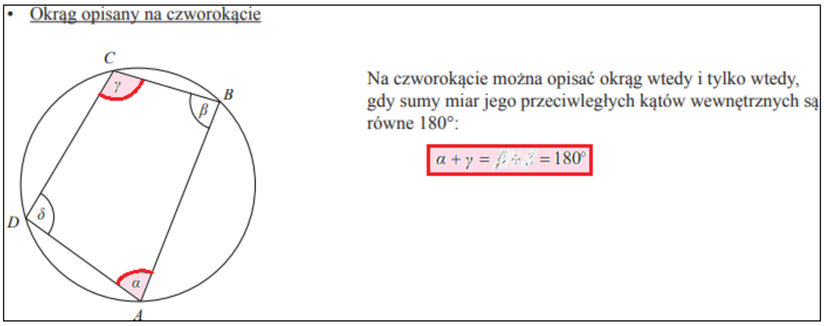
Odp. **C**

15.18.

Kąt $|\angle ASC| = 122°$ jest kątem środkowym (rys. 1). Dorysowujemy kąt wpisany oparty na tym samym łuku AC, co kąt środkowy $\angle ASC$, więc jest **2 razy mniejszy** od kąta $\angle ASC$ (rys. 2).



Sytuacja, w której na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg (rys. 3), pozwala nam (z użyciem **karty wzorów**, str. 12) w łatwy sposób wyznaczyć szukaną miarę kąta $\boldsymbol{x}$.


• Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°}$

$$x + 61° = 180°$$

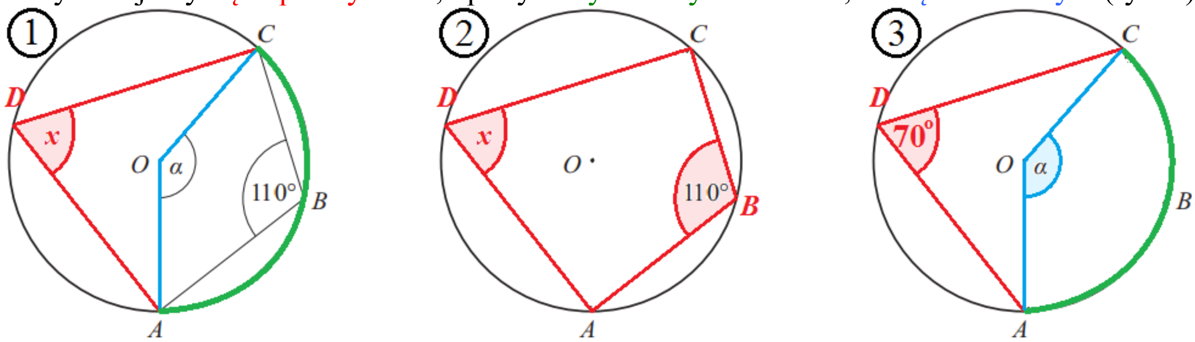
$$x = 180° - 61°$$

$$x = \mathbf{119}°$$

Odp. **A**

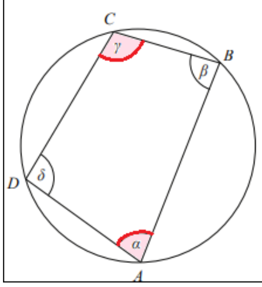
15.19.

Dorysowujemy kąt wpisany *ADC*, oparty na tym samym łuku *AC*, co kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$ (rys. 1).



Sytuacja, w której na czworokącie *ABCD* opisano okrąg (rys. 2), pozwala nam (z użyciem **karty wzorów**, str. 12) w łatwy sposób wyznaczyć miarę kąta $\boldsymbol{x}$.

- Okrąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ}$$

$$x + 110^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 110^\circ$$
$$x = \mathbf{70^\circ}$$

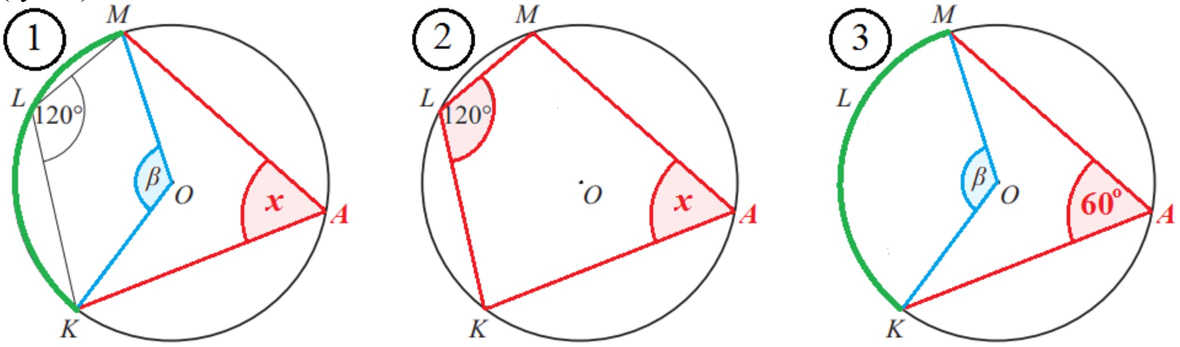
Kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$ jest oparty na tym samym łuku *AC*, co kąt wpisany $ADC = \mathbf{70^o}$ (rys. 3), więc jest **2 razy większy**.

Zatem $\alpha = 2 \cdot 70^\circ = \mathbf{140^\circ}$.

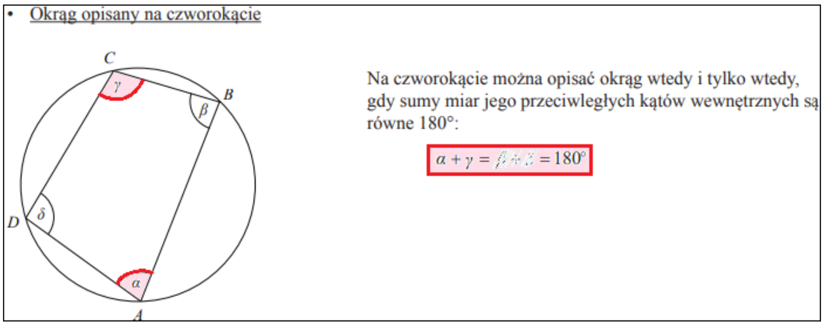
Odp. **A**

15.20.

Dorysowujemy kąt wpisany $KAM = \boldsymbol{x}$, oparty na tym samym łuku AC, co kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$ (rys. 1).



Sytuacja, w której na czworokącie $MLKA$ opisano okrąg (rys. 2), pozwala nam (z użyciem **karty wzorów**, str. 12) w łatwy sposób wyznaczyć miarę kąta $\boldsymbol{x}$.



$$x + 120^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 120^\circ$$
$$x = \mathbf{60^\circ}$$

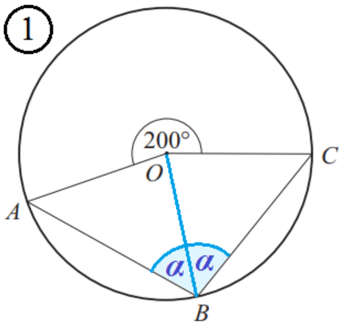
Kąt środkowy $\boldsymbol{\beta}$ jest oparty na tym samym łuku KM, co kąt wpisany $MAK = \mathbf{60^o}$ (rys. 3), więc jest **2 razy większy**.

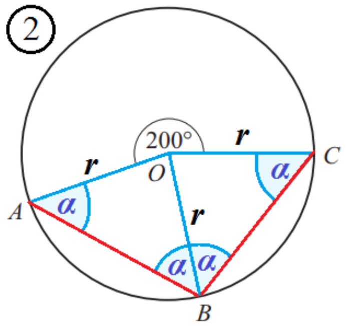
Zatem $\beta = 2 \cdot 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$.

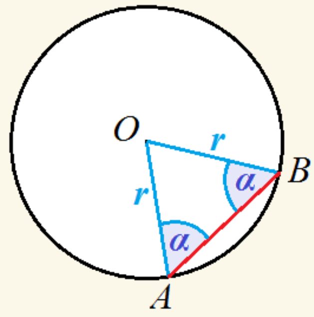
Odp. **A**

15.21.

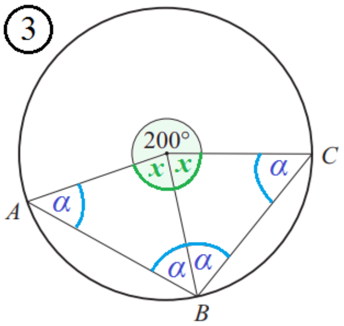
Z informacji o dwusiecznej zawierającej odcinek BO mamy $|\angle ABO| = |\angle OBC| = \alpha$ (rys. 1).
Kąty między promieniami AO i BO, a cięciwą AB są **równe**, tak samo w ΔBOC (rys. 2).

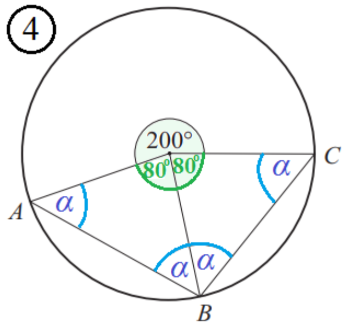


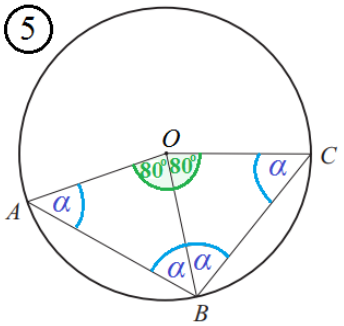




kąty między
promieniem okręgu
a cięciwą są **równe**







Trójkąty ABO i BCO są przystające, więc mają takie same kąty.
Wówczas kąty przy wierzchołku O są **równe** (rys. 3).

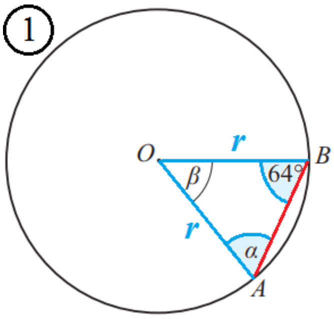
Zatem $x + x + 200° = 360°$, stąd $\boldsymbol{x = 80°}$ (rys. 4).

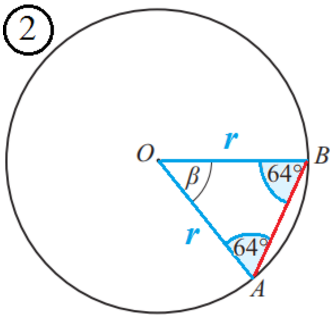
Miarę szukanego kąta $|\angle ABO| = \alpha$ policzymy z warunku na **sumę miar kątów** w ΔABO.

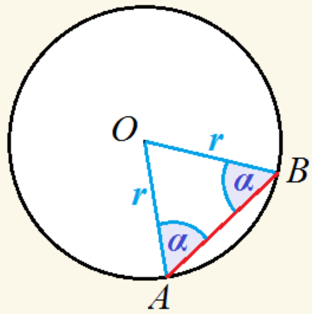
$$\alpha = \frac{180° - 80°}{2} = \mathbf{50}° .$$

Odp. **B**

15.22.
Odcinki *AO* i *BO* to promienie okręgu (rys. 1). Kąty między promieniem okręgu a cięciwą są **takie same**, więc jeśli $|\angle ABO| = 64°$, to $\alpha = 64°$ (rys. 2).







kąty między
promieniem okręgu
a cięciwą są **równe**

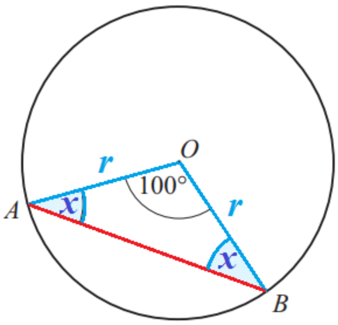
Z sumy miar kątów w ΔABO wyliczamy miarę kąta β:

$\beta = 180° - 64° - 64° = \mathbf{52}°$.

Zatem $\alpha = 64°, \beta = 52°$.

Odp. **D**

15.23.

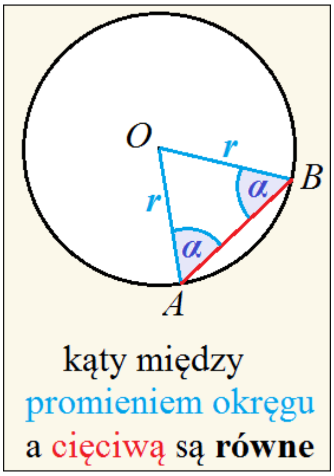


Kąty oznaczone literami α i β **są równe**, bo są to kąty między promieniem okręgu a cięciwą.

$180° - 100° = 80°$

$80° : 2 = 40°$

$\alpha = \beta = 40°$

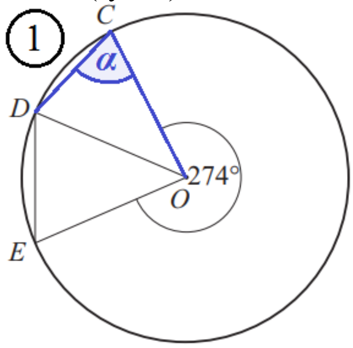


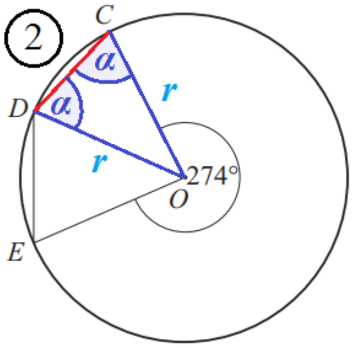
Odp. **C**

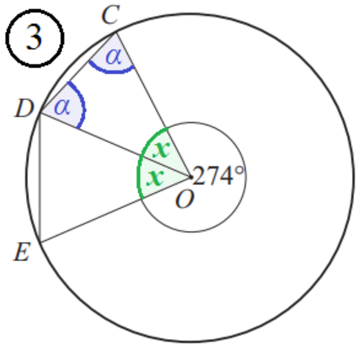
15.24.

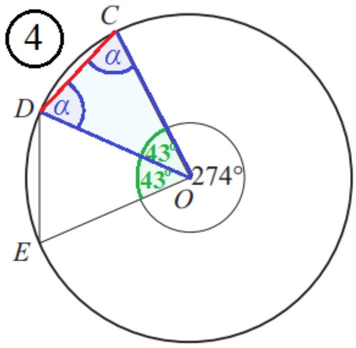
Oznaczamy szukany kąt DCO jako α, pamiętając że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta DCO określa jego położenie (rys. 1).

Odcinki CO i DO to promienie okręgów, więc kąty między promieniem a cięciwą DC są równe (rys. 2).



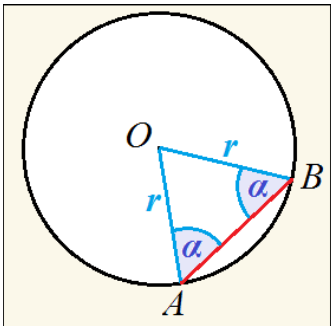






Z informacji o dwusiecznej kąta COE mamy równość kątów EOD oraz DOC (rys. 3).

Zatem $x + x + 274° = 360°$,
stąd $\boldsymbol{x = 43°}$ (rys. 4).



kąty między
promieniem okręgu
a cięciwą są **równe**

Z sumy miar kątów w ΔDOC (rys. 4) wyliczamy miarę kąta α.

$180° - 43° = 137°$

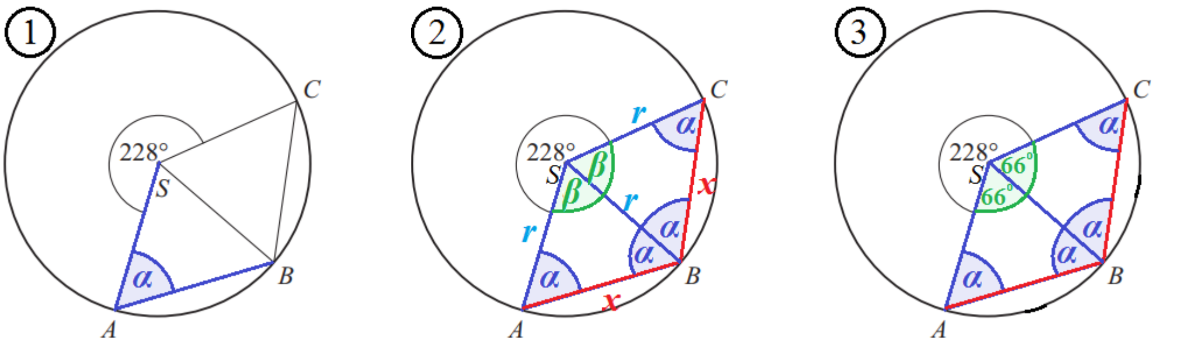
$137° : 2 = \mathbf{68{,}5°}$

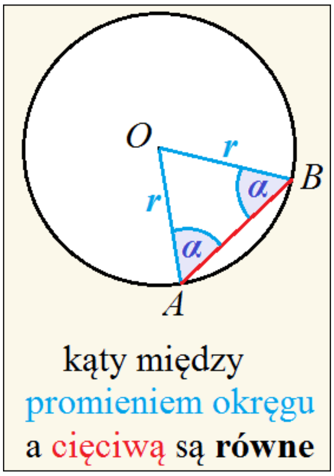
$\boldsymbol{\alpha = 68{,}5°}$

Odp. **C**

15.25.

Oznaczamy szukany kąt SAB jako α, pamiętając że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta SAB określa jego położenie (rys. 1).
Odcinki AS, SB i CS to promienie okręgów, więc kąty między promieniami a cięciwami AB i BC są równe (rys. 2).





Z uwagi na $|AB| = |BC|$, trójkąty SAB i SBC są przystające, więc kąty przy wierzchołku $\boldsymbol{S}$ są równe (rys. 2).

Zatem $\beta + \beta + 228° = 360°$, stąd $\boldsymbol{\beta = 66°}$ (rys. 3).

Z sumy miar kątów w ΔSAB wyliczamy szukaną miarę kąta α.

$180° - 66° = \mathbf{114°}$

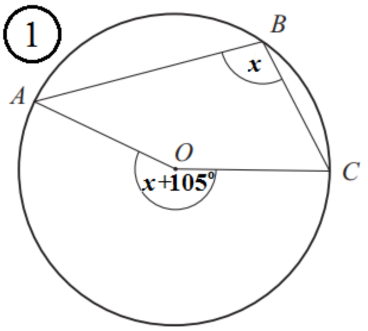
$114° : 2 = \mathbf{57°}$

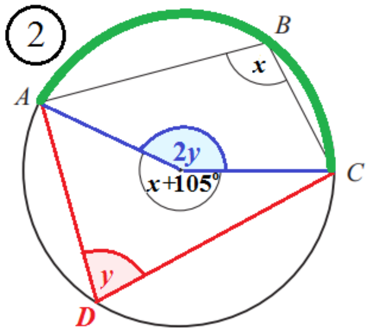
$\alpha = \mathbf{57°}$.

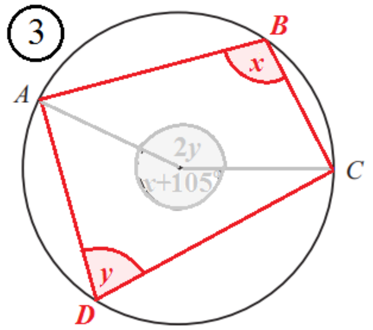
Odp. **A**

15.26.

Z treści zadania wynika, że można oznaczyć $\alpha = x + 105°$ oraz $\beta = x$ (rys. 1).



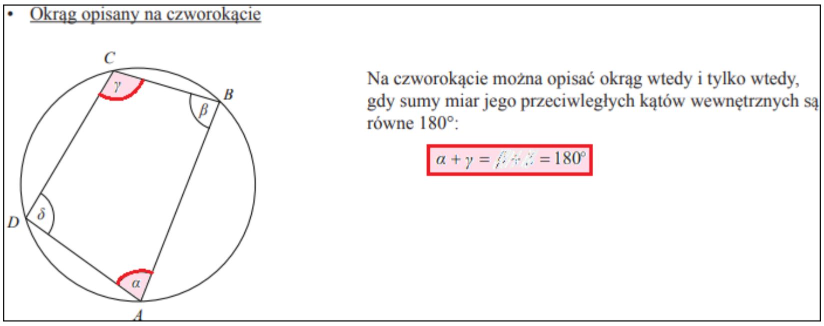




Dorysowujemy kąt wpisany $ADC = \boldsymbol{y}$, który jest oparty na tym samym łuku AC co kąt środkowy AOC = $\mathbf{2}\boldsymbol{y}$ (rys. 2).

Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg.

Wówczas przeciwległe kąty spełniają warunek $x + y = 180°$ (**karta wzorów**, str. 12).


• Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Z rys. 2 wynika równość $\boldsymbol{x} + \mathbf{105°} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{360°}$.

Rozwiązujemy **układ równań**:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ x + 105° + 2y = 360° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 180° \\ x + 2y = 360° - 105° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 180° & |\cdot(-1) \\ x + 2y = 255° \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -x - y = -180° \\ x + 2y = 255° \end{cases}$$

$$y = 75°$$

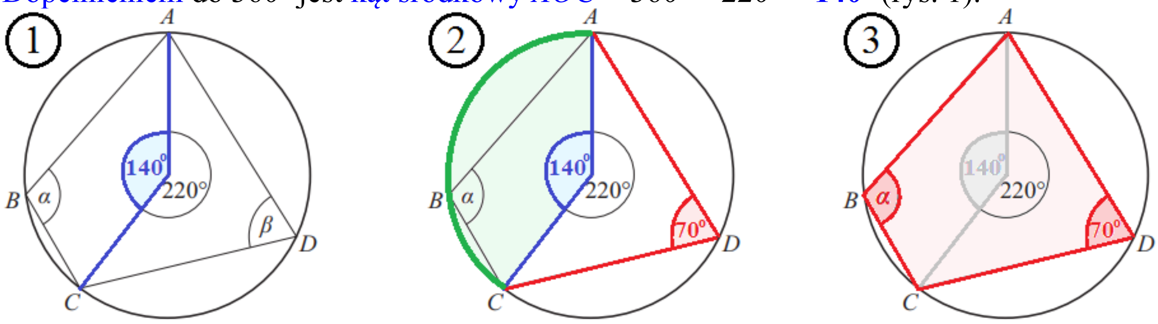
$x + 75° = 180° \quad \rightarrow \quad x = 105°$, więc $\alpha = x + 105° = 105° + 105° = 210°$ oraz $\beta = x = 105°$.

$\alpha + \beta = 210° + 105° = \mathbf{315}°$.

Odp. **A**

15.27.

Dopełnieniem do 360º jest kąt środkowy *AOC* = 360º – 220º = **140º** (rys. 1).



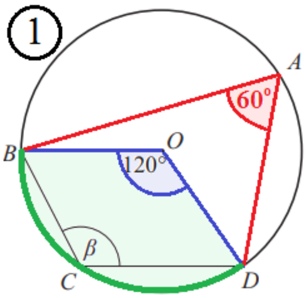
Kąt środkowy **140º** jest oparty na tym samym łuku *AC*, co kąt wpisany *ACD*, więc miara kąta *ACD* to **140º : 2 = 70º** (rys. 2).

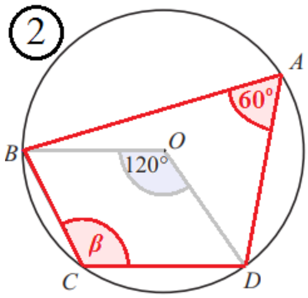
Na czworokącie *ABCD* opisano okrąg, więc przeciwległe kąty $\alpha + 70^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\alpha}$ = **110º**.

Zatem $\alpha = 110^\circ,\ \beta = 70^\circ$.

Odp. **B**

15.28.





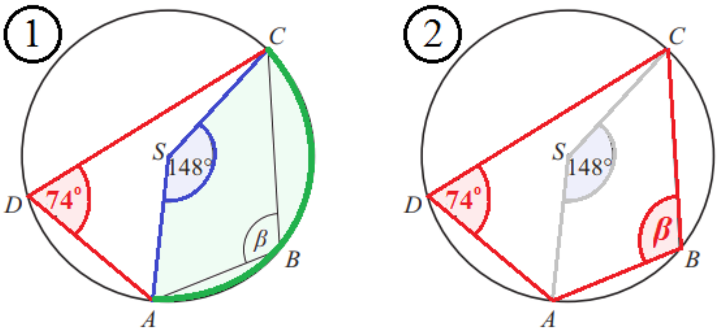
Kąt środkowy **120º** jest oparty na tym samym łuku *BD*, co kąt wpisany *BAD*, więc miara kąta *BAD* to $\boldsymbol{\alpha}$ **= 120º : 2 = 60º** (rys. 1).

Na czworokącie *ABCD* opisano okrąg, więc przeciwległe kąty $\beta + 60^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\beta}$ = **120º**.

Zatem $\alpha = 60^\circ,\ \beta = 120^\circ$.

Odp. **C**

15.29.



Kąt środkowy **148°** jest oparty na tym samym łuku *AC*, co kąt wpisany *ADC*, więc miara kąta *ADC* to $\boldsymbol{\alpha}$ **= 148° : 2 = 74°** (rys. 1).

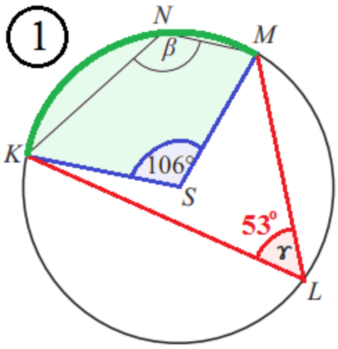
Na czworokącie *ABCD* opisano okrąg, więc przeciwległe kąty $\beta + 74^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\beta}$ = **106°**.

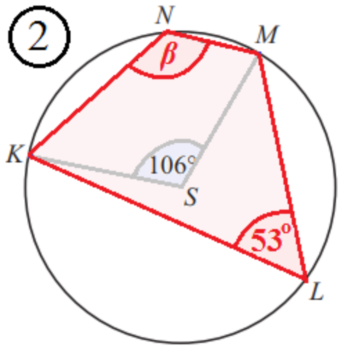
Obliczamy, **o ile stopni** większa jest $\boldsymbol{\beta}$ = **106°** od $\boldsymbol{\alpha}$ = **74°**.

Zatem $106^\circ - 74^\circ =$ **32°**.

Odp. **A**

15.30.





Kąt środkowy **106°** jest oparty na tym samym łuku *KM*, co kąt wpisany *KLM* = ***γ***, więc miara kąta ***γ*** **= 106° : 2 = 53°** (rys. 1).

Na czworokącie *KLMN* opisano okrąg, więc przeciwległe kąty $\beta + 53^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{127^\circ}$.

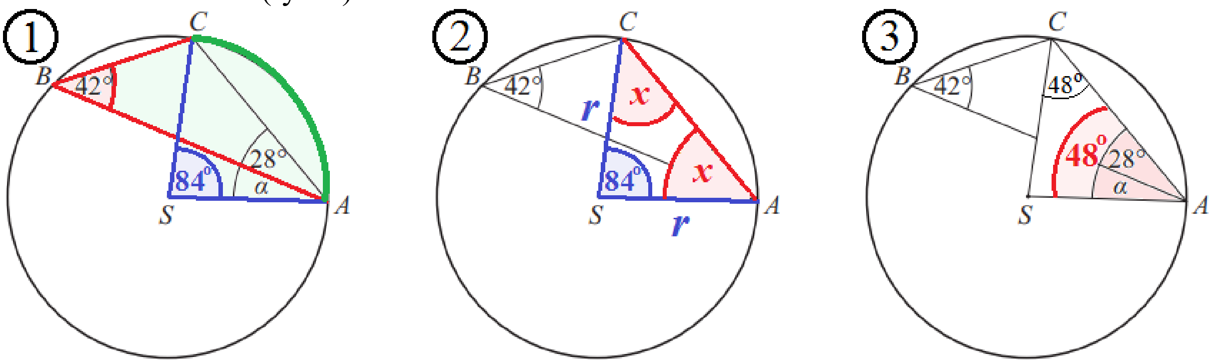
Sprawdzamy, która odpowiedź jest prawdziwa poprzez podstawianie $\beta = 127^\circ$, $\gamma = 53^\circ$.

A. $\beta + 32^\circ = \gamma$ $\rightarrow$ $127^\circ + 32^\circ = 53^\circ$ → równość fałszywa
B. $\gamma + 32^\circ = \beta$ $\rightarrow$ $53^\circ + 32^\circ = 127^\circ$ → równość fałszywa
C. $\beta + 74^\circ = \gamma$ $\rightarrow$ $127^\circ + 74^\circ = 53^\circ$ → równość fałszywa
D. $\gamma + 74^\circ = \beta$ $\rightarrow$ $\mathbf{53^\circ + 74^\circ = 127^\circ}$ → równość **prawdziwa**

Odp. **D**

15.31.

Kąt wpisany **42º** jest oparty na tym samym łuku *AC*, co kąt środkowy *CSA*, zatem miara kąta *CSA* = **2 · 42º** = **84º** (rys. 1).



Odcinki *CS* oraz *AS* to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą *CA* **są równe** (rys. 2).

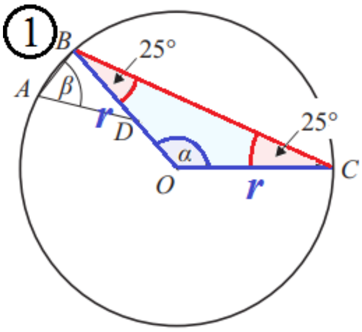
Z sumy miar kątów w ΔCSA wynika, że $x + x + 84° = 180°$, stąd $\boldsymbol{x} = \mathbf{48°}$.

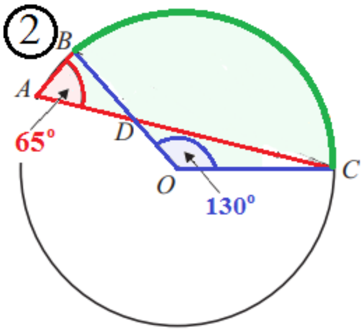
Kąt $|\angle SAC| = \boldsymbol{x} = \mathbf{48°}$ to inaczej suma kątów $\boldsymbol{\alpha}$ oraz **28º** (rys. 3), zatem $\alpha + 28° = 48°$, stąd $\alpha = 20°$.

Odp. **B**

15.32.

Odcinki *BO* i *OC* to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą *BC* są równe, więc jeśli $|\angle DBC| = 25°$, to również $|\angle BCO| = 25°$ (rys. 1).





Z sumy miar kątów w ΔBOC (rys. 1) wynika, że $\alpha + 25° + 25° = 180°$, stąd $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{130^o}$.

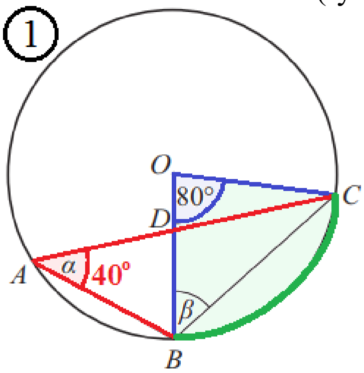
Kąt środkowy **130°** jest oparty na tym samym łuku *BC*, co kąt wpisany $\boldsymbol{\beta}$ = *BAC*, stąd wynika, że $\boldsymbol{\beta}$ = **130° : 2 = 65°** (rys. 2).

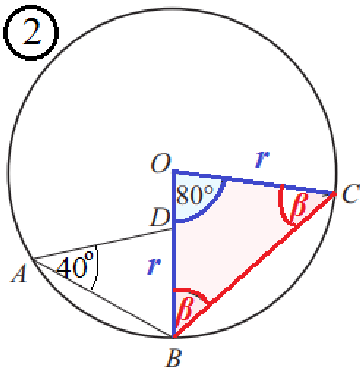
Zatem $\alpha = 130°$, $\beta = 65°$.

Odp. **A**

15.33.

Kąt środkowy **80°** jest oparty na tym samym łuku *BC*, co kąt wpisany *BAC* = ***α***.
Zatem ***α*** = **80° : 2** = **40°** (rys. 1).





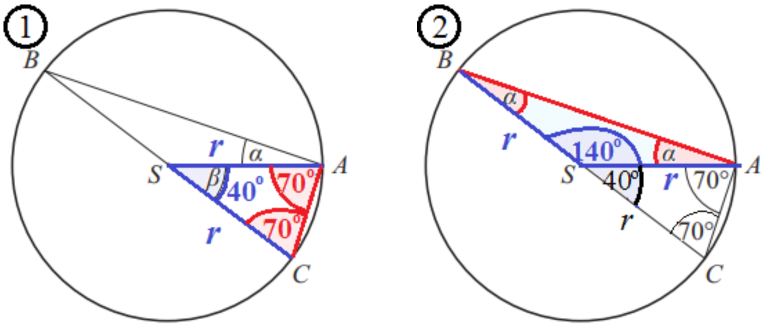
Odcinki *BO* i *OC* to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą *BC* są równe, więc z sumy miar kątów ΔBOC wynika, że $\beta + \beta + 80° = 180°$, stąd ***β*** = **50°** (rys. 2).

Zatem $\alpha = 40°,\ \beta = 50°$.

Odp. **C**

15.34.

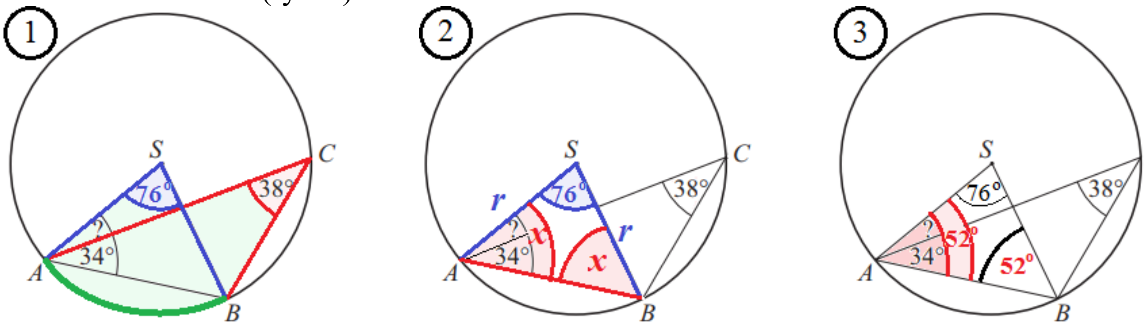
Odcinki CS i AS to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą AC są równe, więc z sumy miar kątów ΔSAC wynika, że $\beta + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{40^o}$ (rys. 1).



Odcinki BS i AS to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą AB są równe, więc z sumy miar kątów ΔSAB wynika, że $\alpha + \alpha + 140^\circ = 180^\circ$, stąd $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{20^o}$ (rys. 2).

Odp. **C**

15.35.
Kąt wpisany **38^o** jest oparty na tym samym łuku AB, co kąt środkowy ASB, zatem miara kąta ASB = **$2 \cdot 38^o = 76^o$** (rys. 1).



Odcinki AS oraz SB to promienie okręgu. Kąty między promieniem a cięciwą AB **są równe** (rys. 2).
Z sumy miar kątów w ΔSAB wynika, że $x + x + 76° = 180°$, stąd **$x = 52^o$** (rys. 3).
Wówczas $|\angle SAC| = 52^o - 34^o =$ **18^o**.

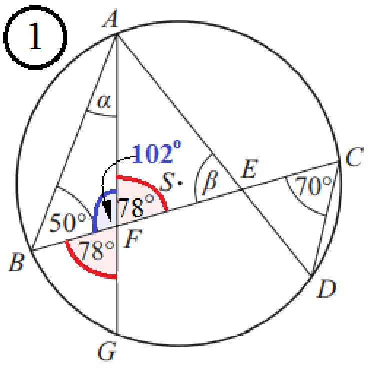
Odp. **B**

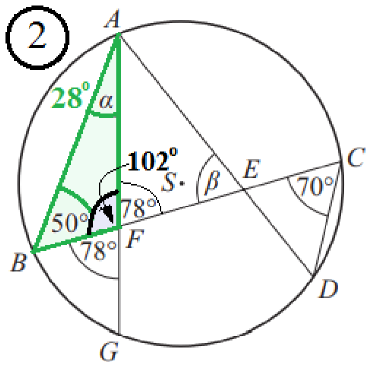
15.36.

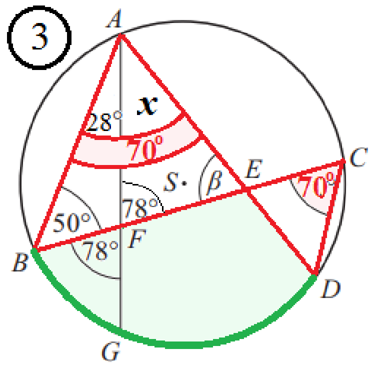
Z własności kątów wierzchołkowych mamy $|\angle AFE| = \mathbf{78^o}$, a z własności kątów przyległych $|\angle BFA| = 180° - 78° = \mathbf{102^o}$ (rys. 1).

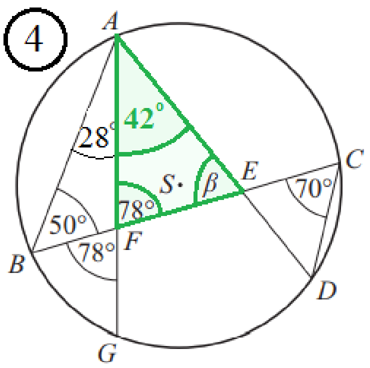
Z sumy miar kątów w trójkącie *ABF* wyliczamy $\alpha = 180° - 50° - 102° = \mathbf{28^o}$ (rys. 2).
Kąty *BAD* oraz *BCD* to kąty wpisane oparte na tym samym łuku *BD*, więc są **równe**, zatem jeśli $|\angle BCD| = 70°$, to również $|\angle BAD| = 70°$ (rys. 3).

Niech $|\angle GAE| = x$. Wówczas $28° + x = 70°$, stąd $\boldsymbol{x = 42^o}$ (rys. 4).

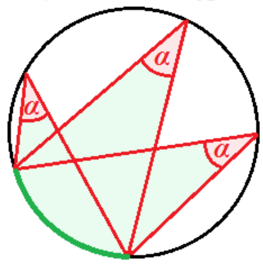








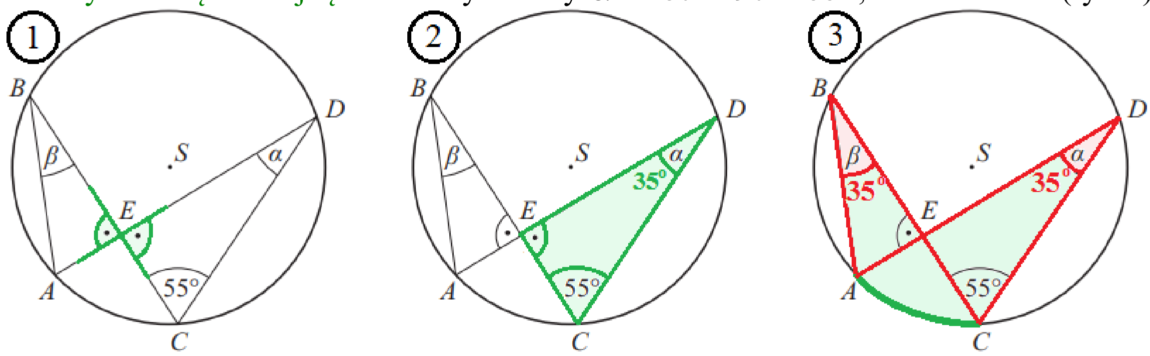
Miary kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku okręgu, są **równe**



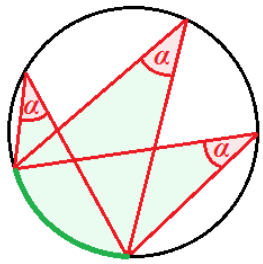
Z sumy miar kątów trójkąta *AFE* wyliczamy $\beta = 180° - 78° - 42° = \mathbf{60^o}$ (rys. 4).

Odp. **B**

15.37.
Jeśli kąt *EAB* jest prosty, to również kąt *CED* jest prosty (rys. 1).
Z sumy miar kątów trójkąta *CED* wyliczamy $\alpha = 180° - 90° - 55°$, zatem $\boldsymbol{\alpha = 35^o}$ (rys. 2).



Miary kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku okręgu, są **równe**



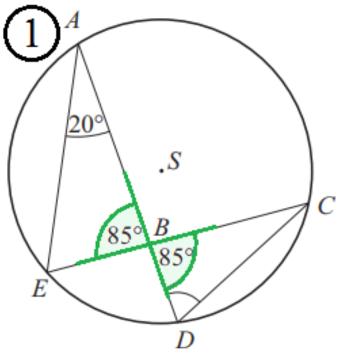
Kąty *ABC* oraz *ADC* są kątami wpisanymi, opartymi na tym samym łuku *AC*, więc są **równe**; zatem jeśli $\boldsymbol{\alpha = 35^o}$, to również $\boldsymbol{\beta = 35^o}$ (rys. 3).

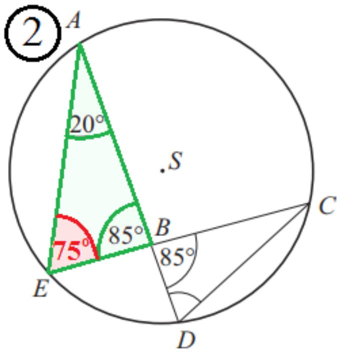
Odp. **A**

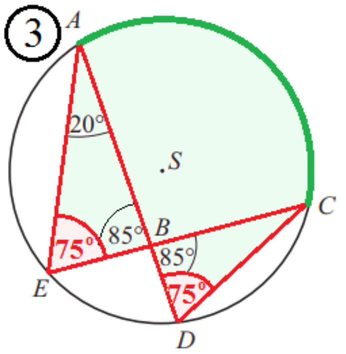
15.38.

Z własności kątów wierzchołkowych mamy $|\angle EBA| = \mathbf{85^o}$ (rys. 1).

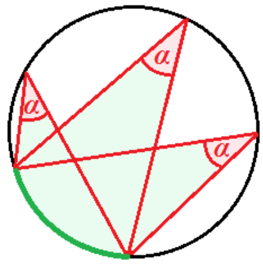
Z sumy miar kątów w trójkącie *ABE* wyliczamy $|\angle AEB| = 180° - 20° - 85° = \mathbf{75^o}$ (rys. 2).







Miary kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku okręgu, są **równe**



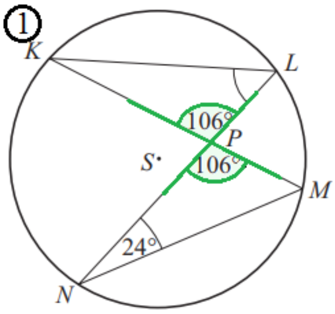
Kąty *AEC* oraz *ADC* to kąty wpisane oparte na tym samym łuku *AC*, więc są **równe**, zatem jeśli $|\angle AEC| = 75°$, to również $|\angle BDC| = 75°$ (rys. 3).

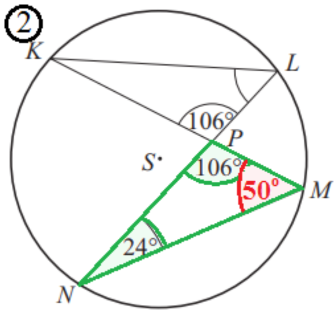
Odp. **B**

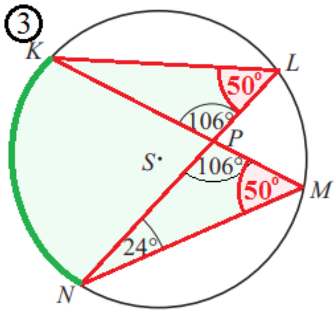
15.39.

Z własności kątów wierzchołkowych mamy $|\angle NPM| = \mathbf{106^o}$ (rys. 1).

Z sumy miar kątów w trójkącie *NPM* wyliczamy $|\angle PMN| = 180° - 24° - 106° = \mathbf{50^o}$ (rys. 2).

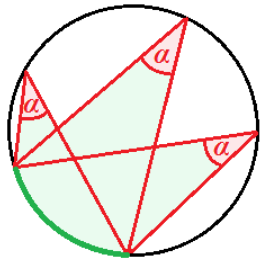






Kąty *KMN* oraz *KLP* to kąty wpisane oparte na tym samym łuku *KN*, więc są **równe**, zatem jeśli $|\angle KMN| = 50°$, to również $|\angle KLP| = 50°$ (rys. 3).

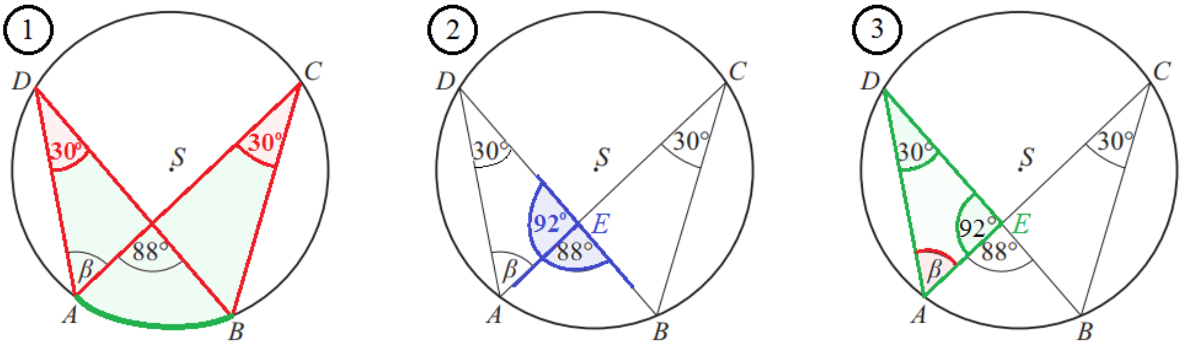
Miary kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku okręgu, są **równe**



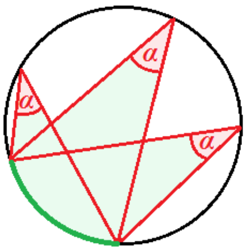
Odp. **C**

15.40.

Kąt wpisany $|\angle ACB| = \mathbf{30^o}$ jest oparty na tym samym łuku AB, co kąt wpisany ADB, więc jeśli $|\angle ACB| = \mathbf{30^o}$, to również $|\angle ADB| = \mathbf{30^o}$ (rys. 1).



Miary kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku okręgu, są **równe**



Z własności kątów przyległych obliczamy miarę kąta ADE, więc $|\angle AED| = 180° - 88° = \mathbf{92^o}$ (rys. 2).

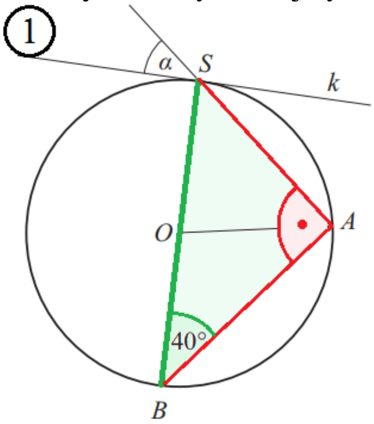
Z sumy miar kątów trójkąta ADE (rys. 3) wyliczamy $\boldsymbol{\beta}$:

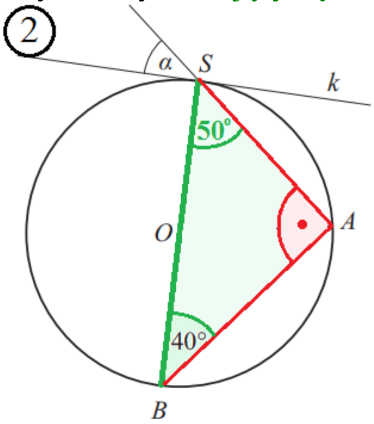
$\boldsymbol{\beta} = 180° - 30° - 92° = \mathbf{58^o}$.

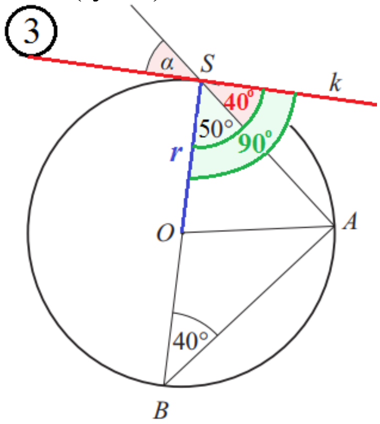
Odp. **A**

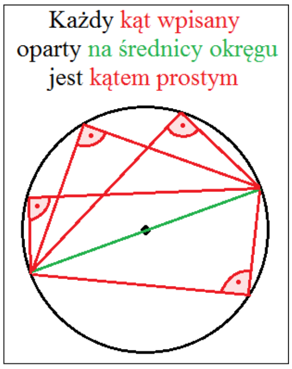
15.41.

Korzystamy z tego, że kąt wpisany *SAB* jest oparty na średnicy *SB* okręgu, więc jest kątem prostym (rys. 1).
Z sumy miar kątów trójkąta *SAB* wyliczamy brakujący kąt BSA = **50º** (rys. 2).



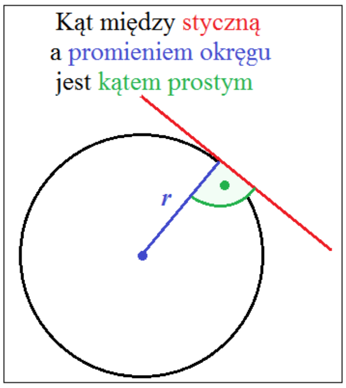






Kąt między promieniem *SO* a styczną ***k*** jest kątem prostym (rys. 3).
Ponieważ kąt $|\angle OSA| = 50°$, to kąt między cięciwą *AS* a styczną ***k*** ma miarę **40º**.

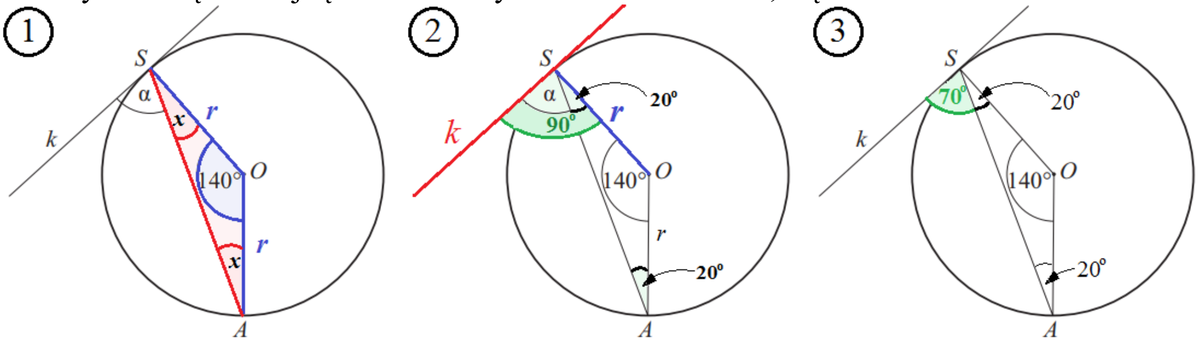
Przy wierzchołku *S* mamy kąty wierzchołkowe, więc ***α*** = **40º**.



Odp. **A**

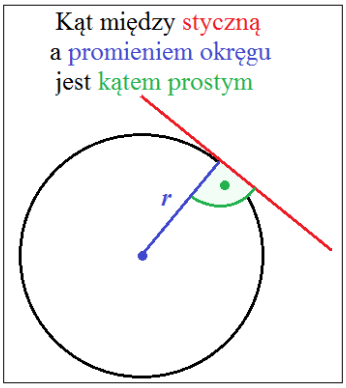
15.42.

Kąty pomiędzy promieniem a cięciwą AS są równe, oznaczmy każdy z nich jako $\boldsymbol{x}$ (rys. 1).
Z sumy miar kątów trójkąta OAS mamy $x+x+140°=180°$, stąd $\boldsymbol{x} = \mathbf{20^o}$.



Między styczną $\boldsymbol{k}$ a promieniem SO mamy kąt prosty (rys. 2).
Z rys. 2 wynika, że **suma kątów**: α oraz $20°$ daje kąt prosty.

Stąd wynika równanie $\alpha+20°=90°$, zatem $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{70^o}$ (rys. 3).



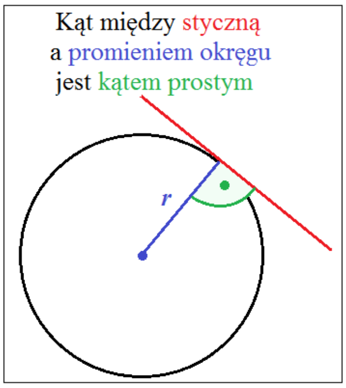
Odp. **D**

15.43.

Z twierdzenia podanego w ramce widocznej obok wynika, że

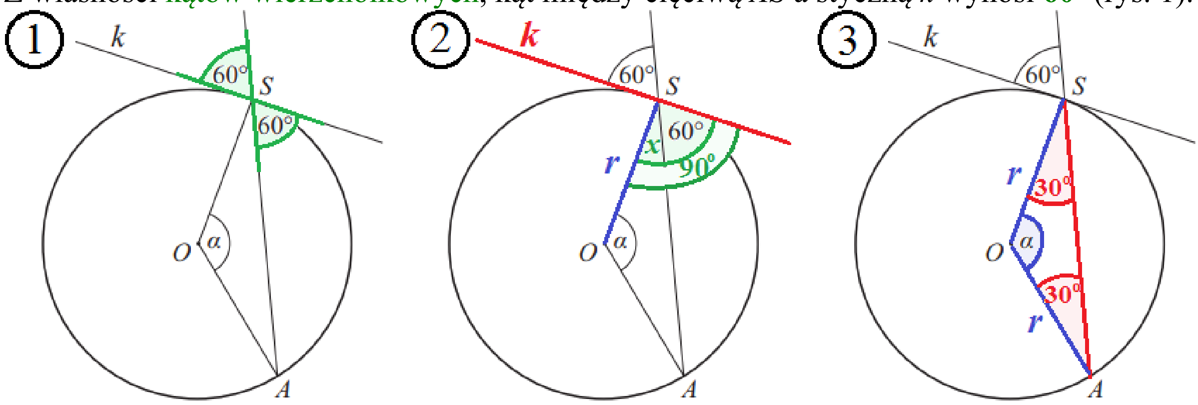
$$\alpha + 25^\circ = 90^\circ .$$

Zatem $\alpha = 90^\circ - 25^\circ$, więc $\boldsymbol{\alpha = 65^o}$.



Odp. **D**

15.44.
Z własności kątów wierzchołkowych, kąt między cięciwą AS a styczną k wynosi **60°** (rys. 1).

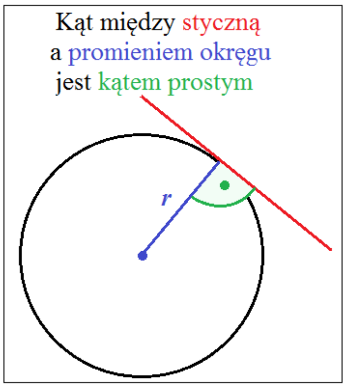


Kąt między promieniem SO a styczną $\boldsymbol{k}$ jest kątem prostym (rys. 2).
Jeśli oznaczymy $|\angle OSA| = \boldsymbol{x}$, to $x + 60° = 90°$, stąd mamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{30°}$ (rys. 3).

Kąty między promieniem a cięciwą AS są **równe**, zatem jeśli $|\angle OSA| = 30°$, to również $|\angle OAS| = 30°$ (rys. 3).

Z sumy miar kątów trójkąta OSA wyliczamy
$\alpha = 180° - 30° - 30° = \mathbf{120°}$.

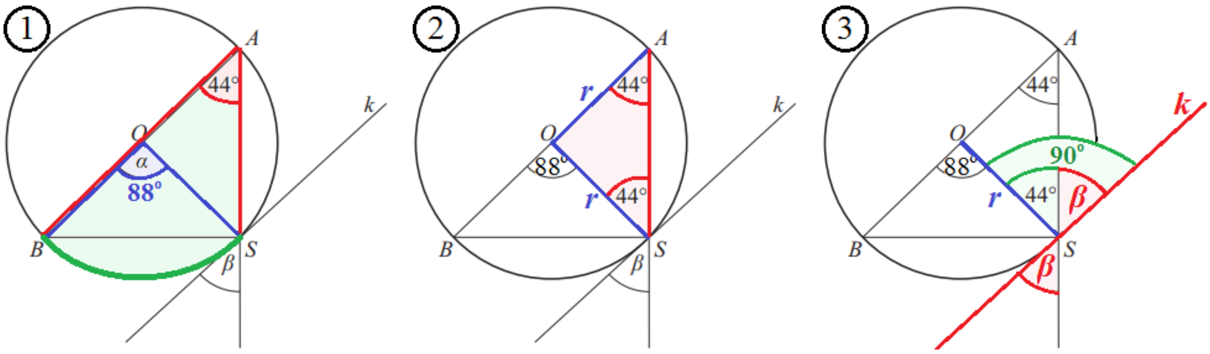
Odp. **B**



15.45.

Kąt wpisany **44°** jest oparty na tym samym łuku *BS* co kąt środkowy $\boldsymbol{\alpha}$, więc $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2 \cdot 44^\circ = 88^\circ}$ (rys. 1).

Kąty między promieniami okręgu a cięciwą *AS* po obu stronach cięciwy *AS* są **takie same**, więc jeśli $|\angle OAS| = 44^\circ$, to również $|\angle OSA| = 44^\circ$ (rys. 2).

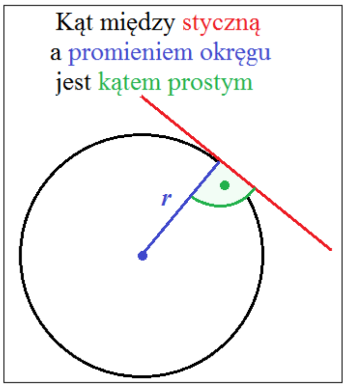


Kąt między promieniem *OS* a styczną ***k*** jest kątem prostym (rys. 3).

Zatem $44^\circ + \beta = 90^\circ$, stąd wynika że $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{46^\circ}$.

Obliczamy sumę kątów $\alpha + \beta$.

Zatem $\alpha + \beta = 88^\circ + 46^\circ = \mathbf{134^\circ}$.



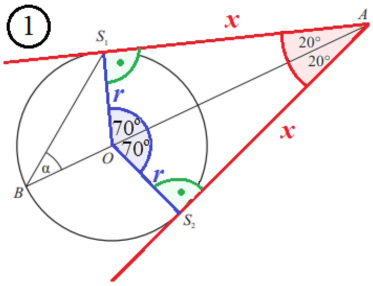
Odp. **B**

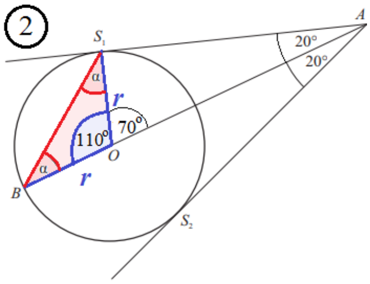
15.46.

Trójkąty AOS_1 i AOS_2 są przystające (mają boki równej długości). Równość $|S_1A| = |S_2A|$ uzasadniamy przez twierdzenie o odcinkach stycznych (**karta wzorów**, str. 11).

Jeśli kąt $|\angle S_2AB| = 20°$, to również $|\angle S_1AB| = 20°$ (rys. 1). Wyliczamy miarę kąta S_1OA:

$|\angle S_1OA| = 180° - 90° - 20° = 70°$.

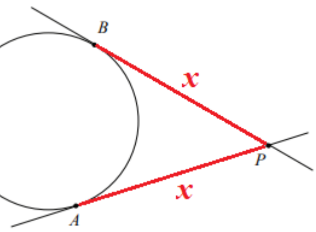




- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to

$\boxed{|PA| = |PB|}$



Wykorzystujemy kąty przyległe przy wierzchołku O.

Obliczamy miarę kąta BOS_1:

$|\angle BOS_1| = 180° - 70° =$ **110°** (rys. 2).

W trójkącie BS_1O, kąty między promieniami okręgu a cięciwą BS_1 są **równe**.

Obliczamy miarę kąta α:

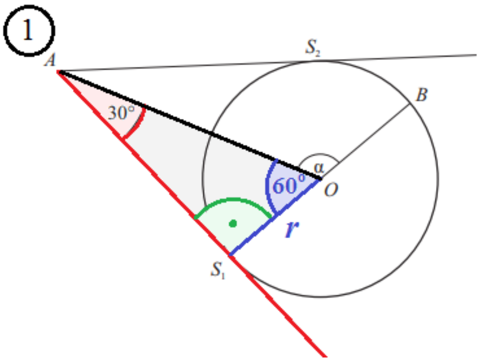
180° – 110° = 70°

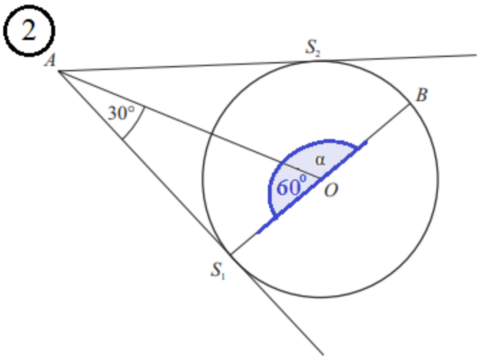
70° : 2 = 35°

α = **35°**

Odp. **B**

15.47.
Kąt pomiędzy promieniem S_1 a styczną AS_1 jest kątem prostym (rys. 1).
Obliczamy kąt trójkąta AOS_1 znajdujący się przy wierzchołku O.
Zatem $|\angle AOS_1| = 180° - 90° - 30° =$ **$60°$**, jak na rys. 1.





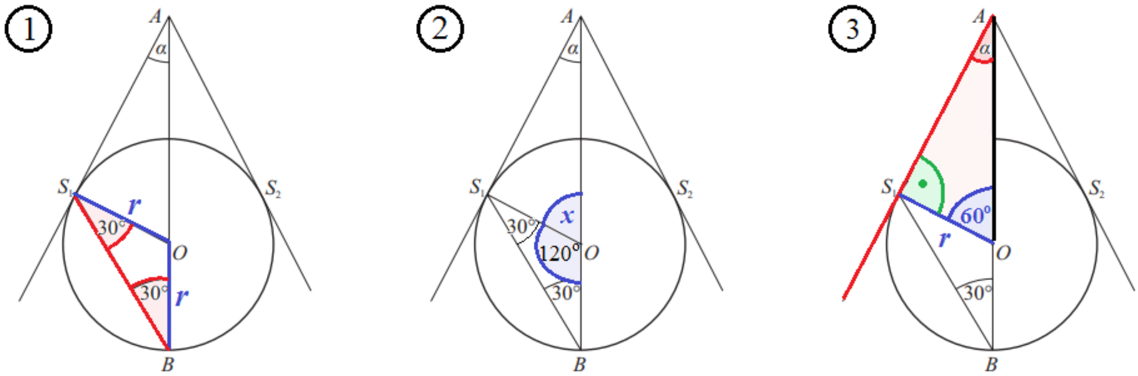
Obliczamy szukaną miarę kąta α z własności kątów przyległych (przy wierzchołku O).
Zatem $\boldsymbol{\alpha} = 180° - 60° =$ **$120°$** (rys. 2).

Odp. **A**

15.48.

W trójkącie S_1OB, kąty między promieniami okręgu a cięciwą S_1B są równe, więc jeśli $|\angle S_1BO| = 30°$, to również $|\angle BS_1O| = 30°$ (rys. 1).

Z sumy miar kątów trójkąta S_1OB obliczamy miarę kąta środkowego S_1OB, zatem:
$|\angle S_1OB| = 180° - 30° - 30° =$ $\mathbf{120^o}$ (rys. 2).



Z własności kątów przyległych liczymy miarę kąta $\boldsymbol{x}$, zatem $\boldsymbol{x} = 180° - 120° =$ $\mathbf{60^o}$ (rys. 3).
Kąt między promieniem S_1O a styczną S_1A jest prosty.

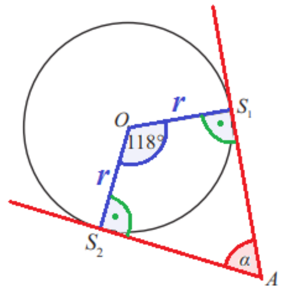
Szukaną miarę kąta α obliczamy z sumy kątów trójkąta S_1OA:

$$\alpha = 180° - 90° - 60° = \mathbf{30}°.$$

Odp. **B**

15.49.

Korzystamy z tego, że kąt pomiędzy promieniem okręgu a styczną jest kątem prostym.

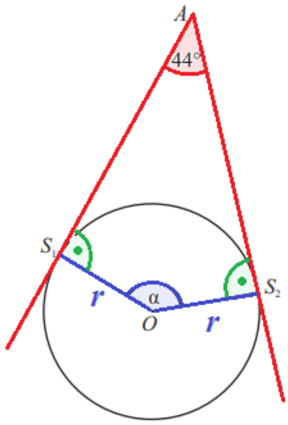


Z sumy miar kątów w czworokącie S_1OS_2A wynika równanie $\alpha + 90° + 118° + 90° = 360°$. Rozwiązujemy to równanie:

$\alpha = 360° - 90° - 118° - 90°$ $\quad\rightarrow\quad$ $\alpha = \mathbf{62}°$.

Odp. **D**

15.50.



Korzystamy z tego, że kąt pomiędzy promieniem okręgu a styczną jest kątem prostym.

Z tego powodu $|\angle AS_1O| = 90°$ oraz $|\angle AS_2O| = 90°$.

Miarę kąta α obliczamy z sumy kątów czworokąta S_1OS_2A:

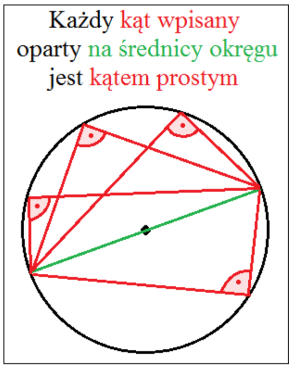
$\alpha + 90° + 44° + 90° = 360°$

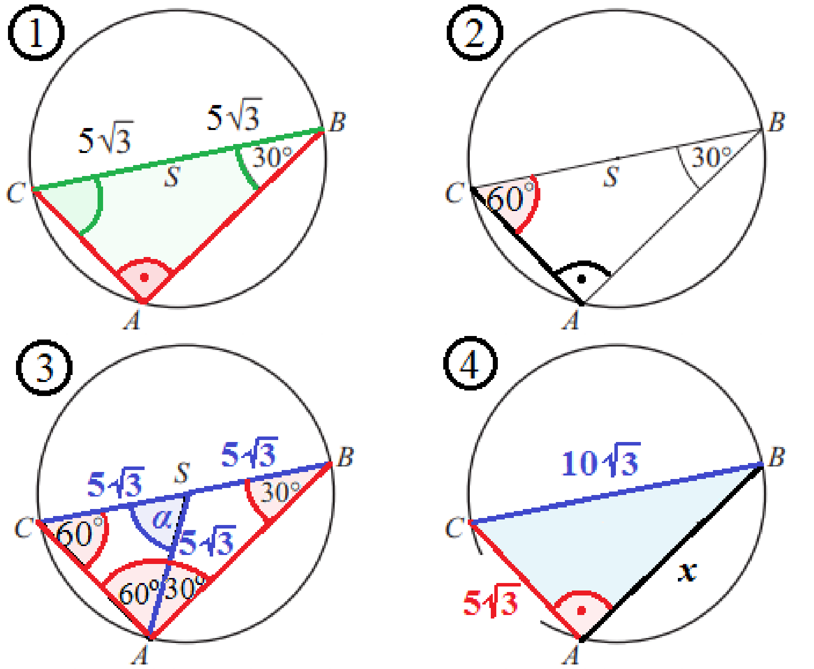
$\alpha = 360° - 90° - 44° - 90° \quad \rightarrow \quad \alpha = \mathbf{136}°$.

Odp. **C**

15.51.

Korzystamy z faktu, że kąt *CAB* jest kątem wpisanym opartym na średnicy *CB*, zatem jest to kąt prosty (rys. 1). Obliczamy brakujący kąt *ACB*, zatem $180° - 90° - 30° = \mathbf{60^o}$ (rys. 2).





Z treści zadania wynika, że średnica okręgu ma długość $10\sqrt{3}$, więc promień jest równy $5\sqrt{3}$.

Kąty między promieniem okręgu a cięciwą w trójkątach *ACS* i *ASB* są **równe** (rys. 3).

Z sumy miar kątów trójkąta *ACS* wynika, że kąt $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{60^o}$, więc ΔACS jest równoboczny, co powoduje że $|AC| = 5\sqrt{3}$ (rys. 4).

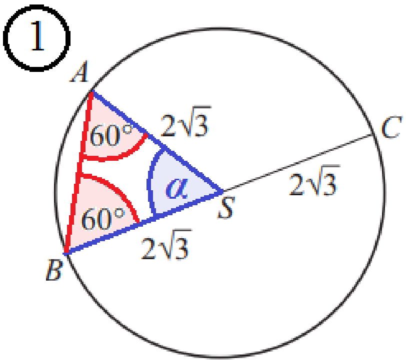
Korzystamy z tw. Pitagorasa w ΔABC, zatem rozwiązujemy równanie $\left(5\sqrt{3}\right)^2 + x^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2$

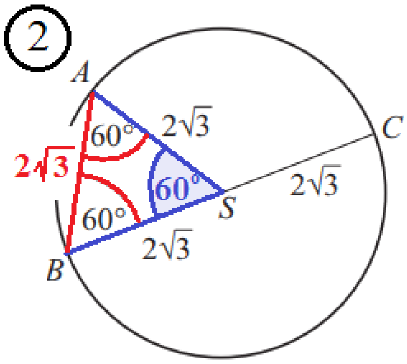
$25 \cdot 3 + x^2 = 100 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad 75 + x^2 = 300 \quad \rightarrow \quad x^2 = 225 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{15}$.

Odp. **D**

15.52.

Kąty między promieniami AS i BS a cięciwą AB są **równe**, więc jeśli $|\angle ABC| = 60°$, to również $|\angle BAS| = 60°$ (rys. 1).



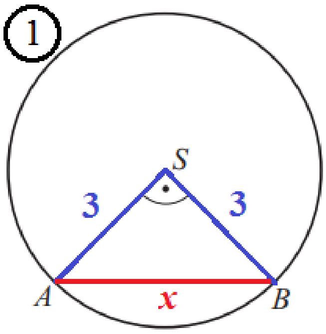


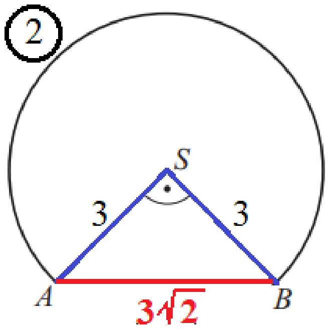
Brakujący kąt α wyliczamy z sumy miar kątów ΔABS:
$60° + 60° + \alpha = 180°$, stąd $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{60°}$, co oznacza że ΔABS **jest równoboczny** (rys. 2), więc cięciwa $|AB| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odp. **A**

15.53.

Odcinek $|BS| = 3$ jest promieniem okręgu, podobnie jak odcinek AS, więc jeśli $|BS| = 3$, to również $|AS| = 3$ (rys. 1).





Oznaczając $|AB| = x$, mamy z tw. Pitagorasa $3^2 + 3^2 = x^2$. Rozwiązujemy równanie:

$9 + 9 = x^2$

$18 = x^2$

$\sqrt{18} = x \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{9 \cdot 2} \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{3\sqrt{2}}$

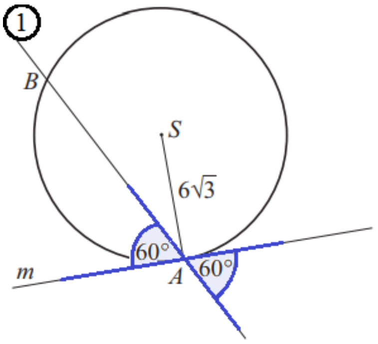
Odp. **B**

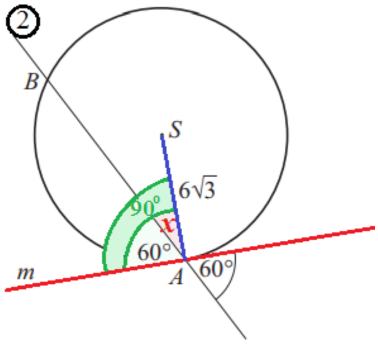
15.54.

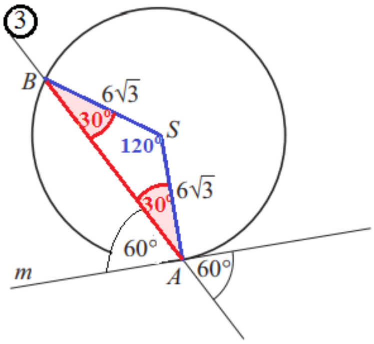
Wykorzystujemy własność kątów wierzchołkowych (rys. 1).

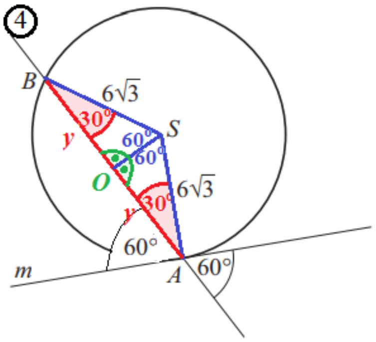
Kąt między promieniem okręgu a styczną m ma miarę **90°** (rys. 2).

Oznaczając $|\angle BAS| = x$, mamy więc $60° + x = 90°$, stąd $\boldsymbol{x = 30°}$ (rys. 3).









Niech O będzie środkiem odcinka AB.

Wówczas, oznaczając $|BO| = |OA| = y$ (rys. 4) i patrząc na trójkąt prostokątny BSO, mamy zależność

$$\cos 30° = \frac{y}{6\sqrt{3}}, \text{ czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6\sqrt{3}}.$$

Mnożąc równanie „na krzyż”, otrzymujemy $2 \cdot y = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$,

czyli $2y = 6 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \underbrace{2y}_{|AB|} = \mathbf{18}$.

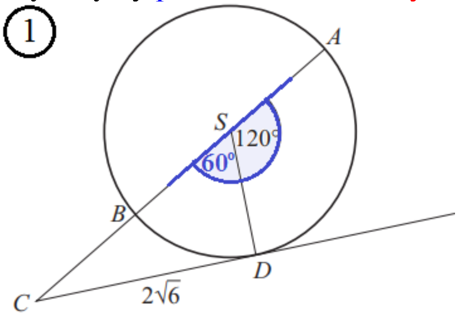
Odp. **D**

15.55.

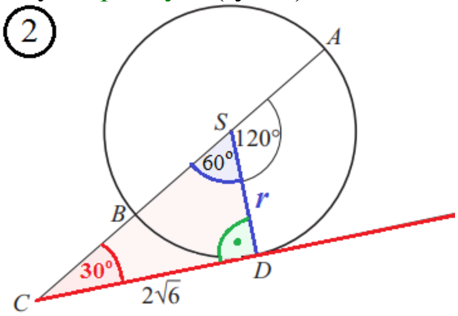
Z własności kątów przyległych mamy $|\angle CSD| = 60^\circ$ (rys. 1).

Kąt między promieniem SD a styczną CD jest kątem prostym (rys. 2).

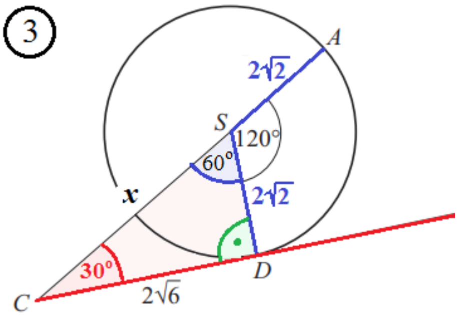
1



2



3



W trójkącie prostokątnym CDS zachodzi zależność $tg\,30^\circ = \dfrac{r}{2\sqrt{6}}$, czyli $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{r}{2\sqrt{6}}$. Mnożąc równanie „na krzyż", otrzymujemy $3r = 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}$, czyli $3r = 2\sqrt{18}$.

$3r = 2\sqrt{18} \quad \to \quad 3r = 2\sqrt{9\cdot 2} \quad \to \quad 3r = 2\cdot \mathbf{3}\sqrt{2} \quad \to$

$\to \quad 3r = 6\sqrt{2} \quad \to \quad r = 2\sqrt{2}$ (rys. 3).

Z tw. Pitagorasa w ΔCDS:

$\left(2\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = x^2$

$4\cdot 6 + 4\cdot 2 = x^2$

$24 + 8 = x^2$

$x^2 = 32 \quad \to \quad x = \sqrt{32} \quad \to \quad x = \sqrt{16\cdot 2} \quad \to \quad x = 4\sqrt{2}$

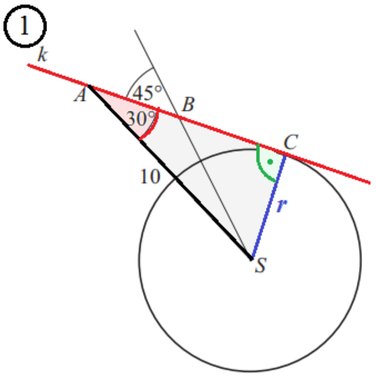
$|AC| = x + |AS| = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$.

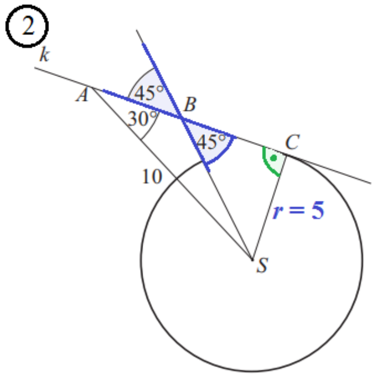
Odp. **A**

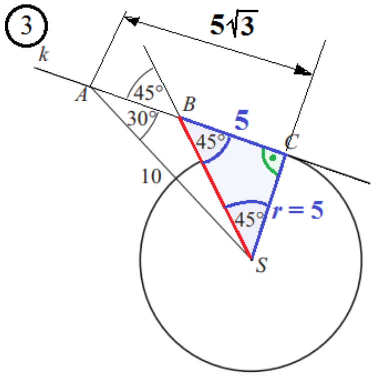
15.56.

Kąt pomiędzy promieniem CS a styczną $\boldsymbol{k}$ jest kątem prostym (rys. 1).

W ΔACS: $\sin 30° = \frac{r}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{r}{10} \quad \rightarrow \quad 2r = 10 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 5}$ (rys. 2).







Z tw. Pitagorasa w ΔACS:

$$|AC|^2 + 5^2 = 10^2$$

$$|AC|^2 + 25 = 100$$

$$|AC|^2 = 75 \quad \rightarrow \quad |AC| = \sqrt{75} \quad \rightarrow \quad |AC| = \sqrt{25 \cdot 3} \quad \rightarrow \quad |AC| = \mathbf{5\sqrt{3}}$$

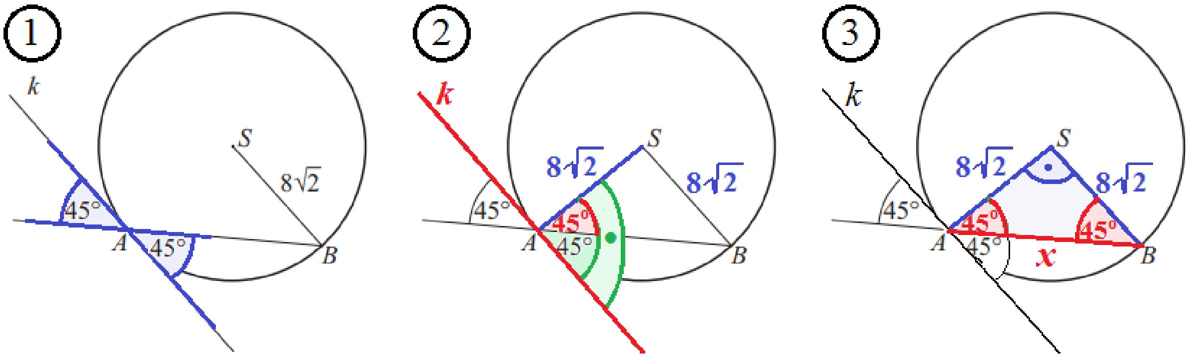
Na rys. 2 widać, że dwa kąty trójkąta BSC mają miary 45° oraz 90°, więc trzeci kąt $|\angle BSC| = \mathbf{45°}$ i to powoduje że $\boldsymbol{|BC| = 5}$ bo trójkąt BSC jest równoramienny (rys. 3).

Liczymy $|AB| = |AC| - |BC| = 5\sqrt{3} - 5 = \mathbf{5}\left(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}\right)$.

Odp. **C**

15.57.

Korzystamy z własności kątów wierzchołkowych (rys. 1). Kąt pomiędzy promieniem AS a styczną $\boldsymbol{k}$ jest kątem prostym, stąd wynika, że $|\angle SAB| = 90° - 45° = \mathbf{45^o}$ (rys. 2).



Kąty między promieniami AS i BS, a cięciwą AB, po obu stronach cięciwy są **równe**, więc jeśli $|\angle SAB| = \mathbf{45^o}$, to również $|\angle SBA| = \mathbf{45^o}$ (rys. 3).

Z sumy miar kątów w ΔABS liczymy kąt środkowy ASB: $|\angle ASB| = 180° - 45° - 45° = \mathbf{90^o}$, zatem trójkąt jest prostokątny.

Oznaczając $|AB| = \boldsymbol{x}$, mamy z tw. Pitagorasa: $\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = x^2$.

$64 \cdot 2 + 64 \cdot 2 = x^2$

$128 + 128 = x^2$

$256 = x^2$

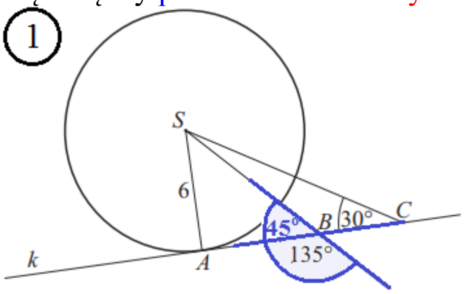
$\boldsymbol{x} = \mathbf{16}$

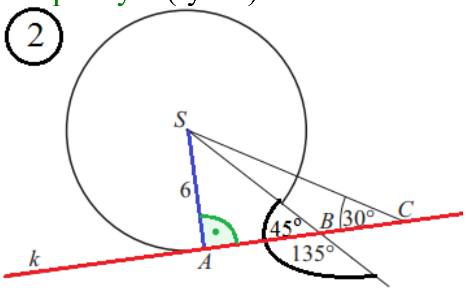
Odp. **C**

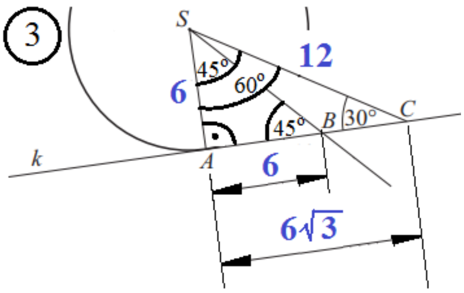
15.58.

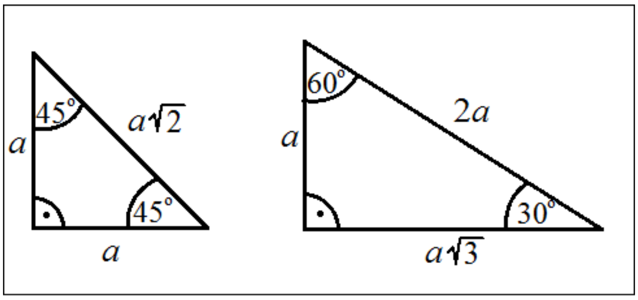
Korzystamy z własności kątów przyległych, zatem $|\angle ABS| = 180° - 135° =$ **45°** (rys. 1).

Kąt między promieniem AS a styczną $\boldsymbol{k}$ jest kątem prostym (rys. 2).









Z sumy miar kątów w ΔABS i ΔACS wyliczamy miary kątów $|\angle ASB| = 45°$ oraz $|\angle ASC| = 60°$.

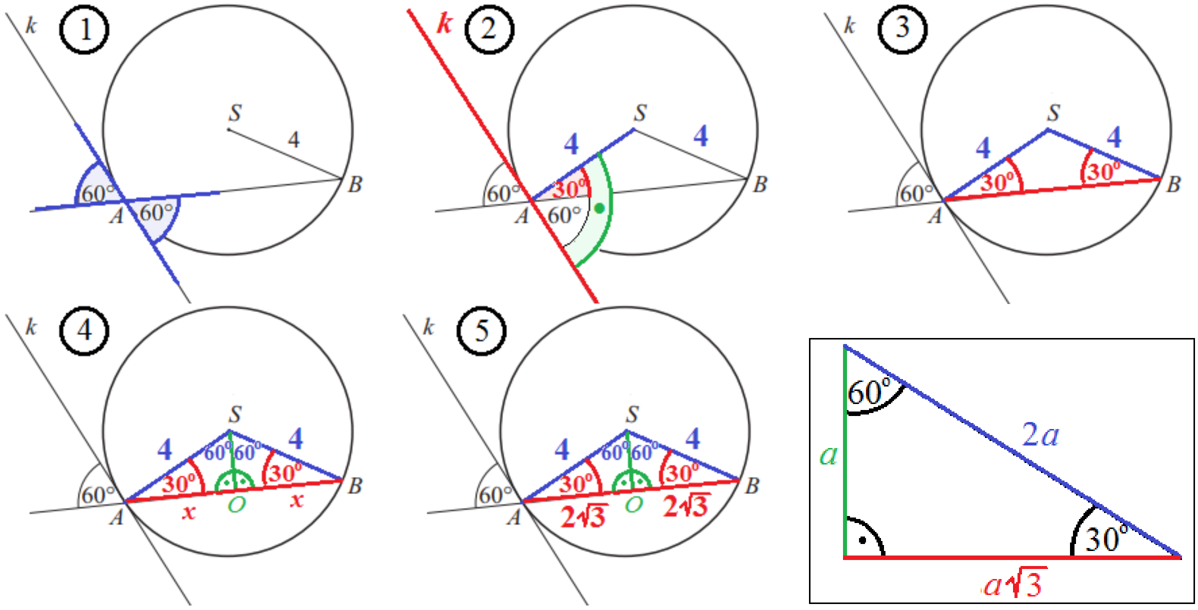
Korzystamy z własności trójkątów prostokątnych o kątach 45°, 45°, 90° oraz 30°, 60°, 90° do określenia długości odcinków AB i AC (rys. 3).

Ponieważ $\underbrace{|AC|}_{6\sqrt{3}} = \underbrace{|AB|}_{6} + |BC|$, to $6\sqrt{3} = 6 + |BC|$, stąd $|BC| = 6\sqrt{3} - 6$, czyli $|BC| = \mathbf{6(\sqrt{3} - 1)}$.

Odp. **A**

15.59.

Korzystamy z własności kątów wierzchołkowych (rys. 1). Kąt pomiędzy promieniem *AS* a styczną ***k*** jest kątem prostym, zatem $|\angle SAB| = 90° - 60° =$ **30°** (rys. 2). Kąty pomiędzy promieniami *AS* i *BS*, a cięciwą *AB*, po obu stronach cięciwy są **równe**, więc jeśli $|\angle SAB| =$ **30°**, to również $|\angle SBA| =$ **30°** (rys. 3).



Wysokość trójkąta równoramiennego *ABS*, poprowadzona z punktu przecięcia ramion *AS* i *BS*, przecina się w punkcie *O* (środku podstawy *AB*) – tak jak na rys. 4.

Wykorzystując własności trójkąta prostokątnego o kątach 30°, 60°, 90°, obliczamy długości odcinka *OB* w ΔSOB.

$|SB| = 2a = 4, \qquad |OB| = a\sqrt{3} = ?$

$2a = 4 \qquad |:2$

$a = 2$

$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \qquad \rightarrow \qquad |OB| = 2\sqrt{3}$

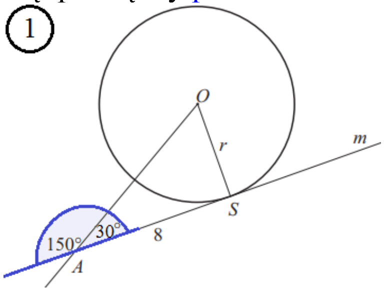
Jeśli $|OB| = 2\sqrt{3}$, to również $|AO| = 2\sqrt{3}$ (rys. 5). Zatem $|AB| = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$.

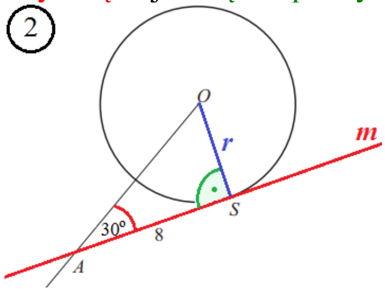
Odp. **D**

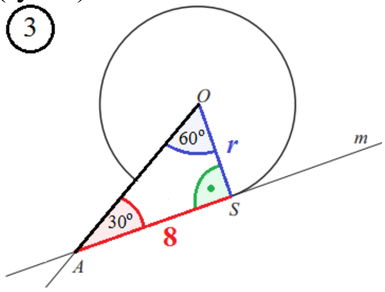
15.60.

Z własności kątów przyległych wynika, że $|\angle OAS| = 180° - 150° =$ **30°** (rys. 1).

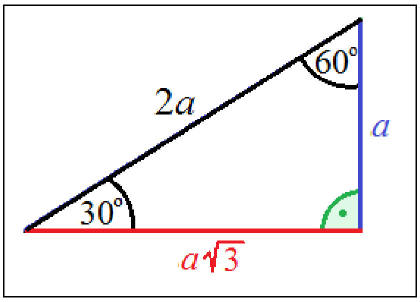
Kąt pomiędzy promieniem OS a styczną ***m*** jest kątem prostym (rys. 2).







Z sumy miar kątów w ΔOAS wyliczamy brakujący kąt.
Zatem $|\angle AOS| = 180° - 90° - 30° =$ **60°** (rys. 3).



Do obliczenia długości promienia ***r*** można wykorzystać własności trójkąta o kątach 30°, 60°, 90°. Zatem:

$$a\sqrt{3} = 8, \qquad r = a = ?$$

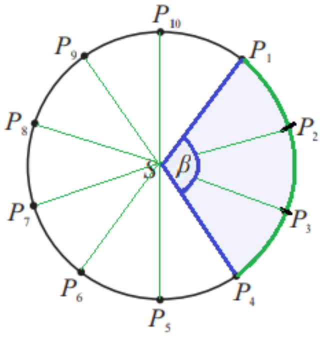
$$a\sqrt{3} = 8 \qquad |:\sqrt{3}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{8\sqrt{3}}{3}}.$$

Odp. **C**

15.61.

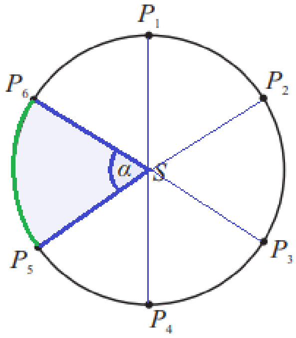


$\mathbf{360^o : 10 =} \mathbf{36^o}$ (kąt pełny dzielimy przez 10 ze względu na 10 łuków)

$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{36^o} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{108^o}$ (mnożymy przez **3** ze względu na to, że kąt $\boldsymbol{\beta}$ zawiera **3** części koła)

Odp. **D**

15.62.

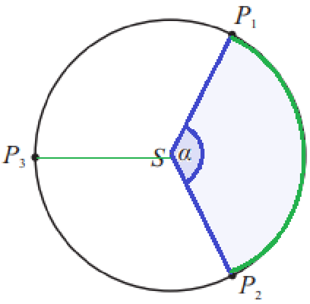


360^o : 6 = **60^o** (kąt pełny dzielimy przez **6** ze względu na 6 łuków)

α = **60^o** (kąt środkowy ***α*** oparty jest na jednym z sześciu łuków)

Odp. **D**

15.63.

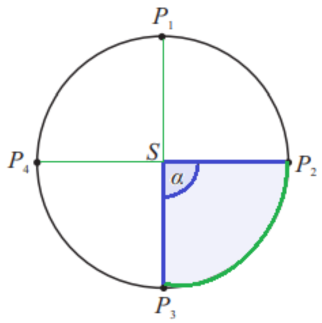


360^o : 3 = 120^o (kąt pełny dzielimy przez **3** ze względu na **3** łuki)

α = **120^o** (kąt środkowy ***α*** oparty jest na jednym z trzech łuków)

Odp. **B**

15.64.

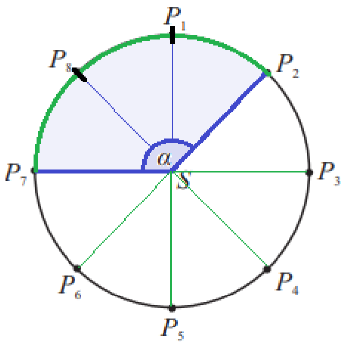


360^o : 4 = 90^o (kąt pełny dzielimy przez **4** ze względu na **4** łuki)

α = **90^o** (kąt środkowy ***α*** oparty jest na jednym z czterech łuków)

Odp. **C**

15.65.



$\mathbf{360^o : 8 = 45^o}$ (kąt pełny dzielimy przez 8 ze względu na 8 łuków)

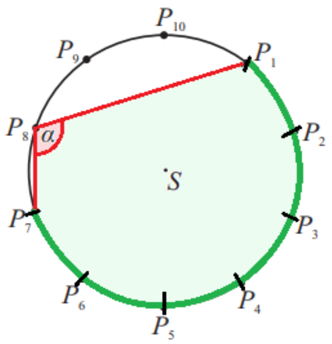
$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45^o} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{135^o}$ (mnożymy przez **3** ze względu na to, że kąt $\boldsymbol{\alpha}$ zawiera **3** części koła)

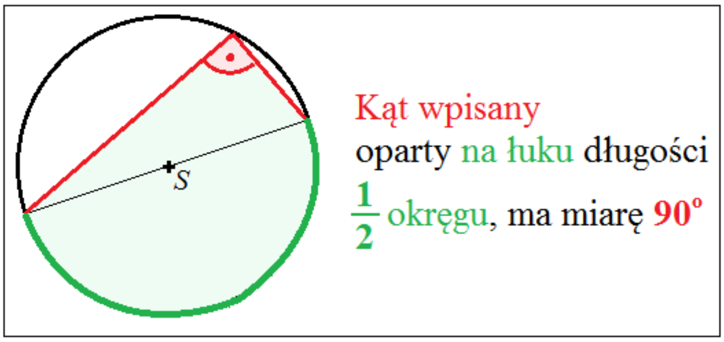
Odp. **D**

15.66.

Kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ jest oparty na części okręgu, składającej się z **6** małych łuków.
Wszystkich tych małych łuków okręgu jest **10**.

Zatem kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ jest oparty na łuku równym $\mathbf{\frac{6}{10}}$ okręgu.





Korzystamy z zasady proporcji:

Część okręgu		Miara kąta
$\frac{1}{2}$	———	90°
$\frac{6}{10}$	———	α

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{6}{10}\cdot 90^\circ$$

$$0{,}5\alpha = 0{,}6\cdot 90^\circ$$

$$0{,}5\alpha = 54^\circ \qquad |:0{,}5$$

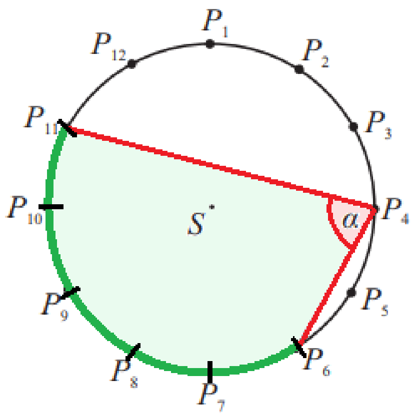
$$\alpha = \frac{54^\circ}{0{,}5} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \mathbf{108^\circ}$$

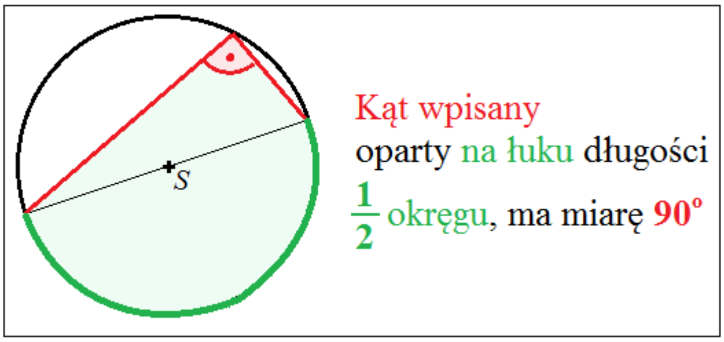
Odp. **C**

15.67.

Kąt wpisany ***α*** jest oparty na części okręgu, składającej się z **5** małych łuków.
Wszystkich tych małych łuków okręgu jest **12**.

Zatem kąt wpisany ***α*** jest oparty na łuku równym $\mathbf{\frac{5}{12}}$ okręgu.





Korzystamy z zasady proporcji:

Część okręgu		Miara kąta
$\frac{1}{2}$	———	90°
$\frac{5}{12}$	———	α

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{5}{12}\cdot 90^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{450^\circ}{12}$$

mnożymy równanie „na krzyż”

$$12\cdot\alpha = 2\cdot 450^\circ$$

$$12\alpha = 900^\circ \qquad |:12$$

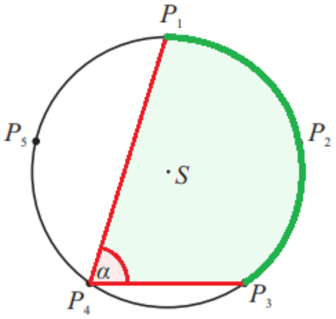
$$\alpha = \mathbf{75}^\circ$$

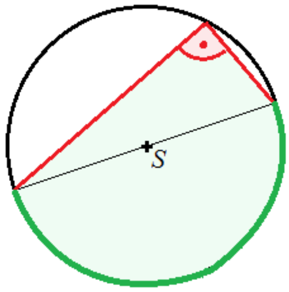
Odp. **A**

15.68.

Kąt wpisany α jest oparty na części okręgu, składającej się z **2** małych łuków.
Wszystkich tych małych łuków okręgu jest **5**.

Zatem kąt wpisany α jest oparty na łuku równym $\frac{2}{5}$ okręgu.





Kąt wpisany oparty na łuku długości $\frac{1}{2}$ okręgu, ma miarę **90°**

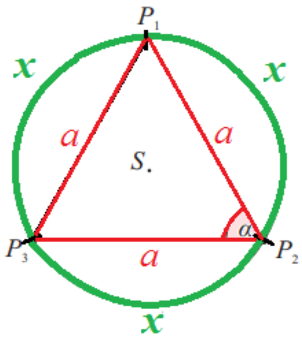
Korzystamy z zasady proporcji:

Część okręgu		Miara kąta
$\frac{1}{2}$	———	90°
$\frac{2}{5}$	———	α

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{5}\cdot 90^\circ$$
$$0{,}5\alpha = 0{,}4\cdot 90^\circ$$
$$0{,}5\alpha = 36^\circ \qquad |:0{,}5$$
$$\alpha = \frac{36^\circ}{0{,}5} \qquad \to \qquad \alpha = \mathbf{72}^\circ$$

Odp. **C**

15.69.



To, że każdy z trzech łuków jest równej długości sprawia, że $|P_1P_2| = |P_3P_2| = |P_3P_1|$, czyli trójkąt jest równoboczny.

W trójkącie równobocznym każdy z kątów ma miarę $\mathbf{60^\circ}$.

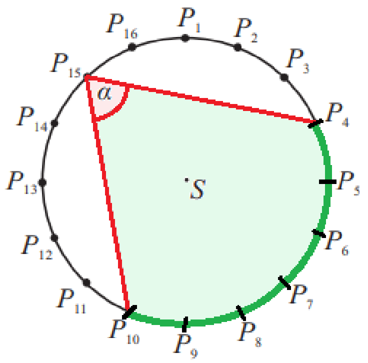
W szczególności, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{60^o}$.

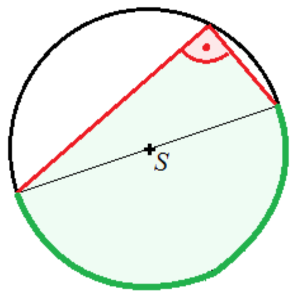
Odp. **D**

15.70.

Kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ jest oparty na części okręgu, składającej się z **6** małych łuków.
Wszystkich tych małych łuków okręgu jest **16**.

Zatem kąt wpisany $\boldsymbol{\alpha}$ jest oparty na łuku równym $\mathbf{\frac{6}{16}}$ okręgu.





Kąt wpisany oparty na łuku długości $\mathbf{\frac{1}{2}}$ okręgu, ma miarę **90°**

Korzystamy z zasady proporcji:

Część okręgu		Miara kąta
$\frac{1}{2}$	———	90°
$\frac{6}{16}$	———	α

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{6}{16}\cdot 90^\circ$$

$$0{,}5\alpha = 0{,}375\cdot 90^\circ$$

$$0{,}5\alpha = 33{,}75^\circ \qquad |:0{,}5$$

$$\alpha = \frac{33{,}75^\circ}{0{,}5} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \mathbf{67{,}5}^\circ < 70^\circ$$

Odp. **A**