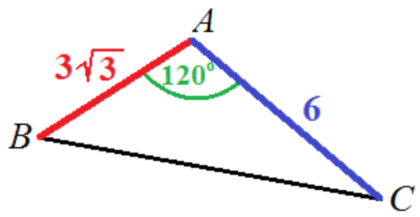
16.1.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy rysunek. Zaznaczamy kąt $BAC = 120^{\circ}$ pamiętając o tym, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta BAC określa jego położenie.



Korzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ – kąt leżący pomiędzy dwoma danymi bokami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ trójkąta.

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90^{\circ} + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^{\circ} + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha}$	$\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos\alpha$	$\text{tg}(180^{\circ} - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\sin(180^{\circ} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^{\circ} + \alpha) = -\cos\alpha$	$\text{tg}(180^{\circ} + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

Wykonujemy obliczenia dla $a = 3\sqrt{3},\ b = 6,\ \alpha = 120^{\circ}$ wcześniej licząc $\sin 120^{\circ}$ (**karta wzorów**, str. 16 – wzór redukcyjny):

$$\sin 120^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \sin 120^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{54}{4} = \mathbf{\frac{27}{2}}$.

Odp. **A**

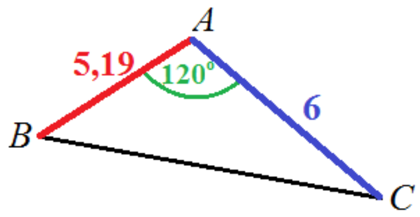
Rozwiązanie II:

W obliczeniach stosujemy przybliżenie $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$. Zaczynamy od odpowiedzi:

A. $\frac{27}{2} = \mathbf{13{,}5}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{2} \approx \frac{9 \cdot 1{,}73}{2} \approx \mathbf{7{,}79}$ C. $\frac{27\sqrt{3}}{4} \approx \frac{27 \cdot 1{,}73}{4} \approx \mathbf{11{,}68}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{4} \approx \frac{9 \cdot 1{,}73}{4} \approx \mathbf{3{,}89}$

$|AB| \approx 3 \cdot 1{,}73 = \mathbf{5{,}19}$,

$|AC| = \mathbf{6}$.



Obliczamy

$$\sin 120^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}73}{2} = \mathbf{0{,}865}.$$

Korzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$

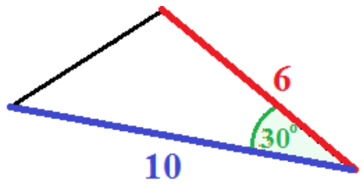
dla $\boldsymbol{a} = \mathbf{5{,}19}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$ oraz $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}685}$.

Wówczas $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot 5{,}19 \cdot 6 \cdot 0{,}865 \approx \mathbf{13{,}47}$.

Spośród wyników z odpowiedzi, najbliżej rezultatu **13,47** jest liczba **13,5** z odp. **A**. Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

16.2.

Wykonujemy rysunek.



Korzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie ***α*** – kąt leżący pomiędzy dwoma danymi bokami ***a***, ***b*** trójkąta.

Wykonujemy obliczenia dla ***a* = 6**, ***b* = 10** oraz ***α* = 30°** oraz wykorzystując $\sin 30° = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

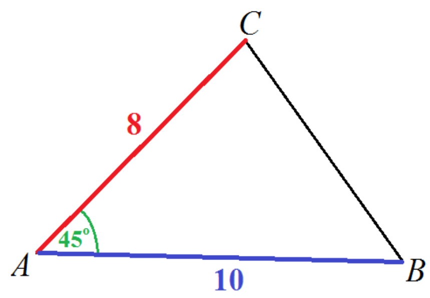
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{15}.$$

Odp. **B**

16.3.

Wykorzystujemy wzór na pole trójkąta

$P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$, gdzie ***α*** – kąt leżący pomiędzy dwoma danymi bokami ***a***, ***b*** trójkąta.



Wykonujemy obliczenia dla ***a* = 8**, ***b* = 10** oraz ***α* = 45°**, pamiętając że $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zatem:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{10\cdot 8\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{80\sqrt{2}}{4}=\mathbf{20\sqrt{2}}.$$

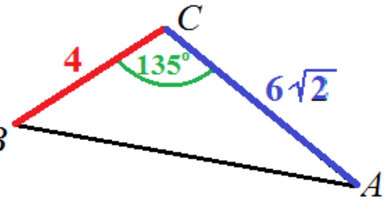
Odp. **C**

16.4.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy rysunek.

Zaznaczamy kąt ACB = **135°** pamiętając o tym, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta ACB określa jego położenie.



Korzystamy ze wzoru

$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ – kąt leżący pomiędzy dwoma danymi bokami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ trójkąta.

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$	
$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$	
$\boxed{\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha}$	$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180°+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$

Wykonujemy obliczenia dla

$a = 4,\ b = 6\sqrt{2},\ \alpha = 135°$

wcześniej licząc $\sin 135°$ (**karta wzorów**, str. 16 – wzór redukcyjny):

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{24 \cdot 2}{4} = \mathbf{12}$.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

W obliczeniach wykorzystujemy przybliżenia $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$, $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$, $\sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$, $\sqrt{6} \approx \mathbf{2{,}45}$.

Zaczynamy od odpowiedzi:

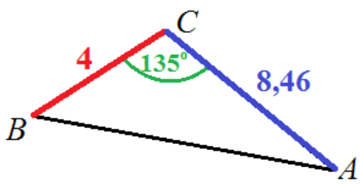
A. $6\sqrt{2} \approx 6 \cdot 1{,}41 = \mathbf{8{,}46}$

B. $6\sqrt{5} \approx 6 \cdot 2{,}24 = \mathbf{13{,}44}$

C. $6\sqrt{6} \approx 6 \cdot 2{,}45 = \mathbf{14{,}7}$

D. **12**

Obliczamy w przybliżeniu $|AC| = 6\sqrt{2} \approx 6 \cdot 1{,}41 = \mathbf{8{,}46}$



Obliczamy

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \mathbf{0{,}705}$$

Dla $\boldsymbol{a} = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{8{,}46}$ oraz $\mathbf{\sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}705}$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta:

$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8{,}46 \cdot \sin 135° \approx 0{,}5 \cdot 4 \cdot 8{,}46 \cdot 0{,}705 \approx \mathbf{11{,}93}$.

Spośród odpowiedzi, najbliżej rezultatu **11,93** jest liczba **12** w odp. **D**.

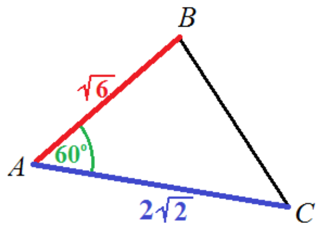
Oznacza to, że odp. **D** jest prawidłowa.

16.5.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy rysunek.

Zaznaczamy kąt BAC = **60°** pamiętając o tym, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta BAC określa jego położenie.



Wykorzystujemy wzór $P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\alpha$, gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ – kąt leżący pomiędzy dwoma danymi bokami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ trójkąta.

Wykonujemy obliczenia dla $a=\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{2}$, $\alpha=60°$ oraz pamiętając o $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$P=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot \sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\frac{2\sqrt{36}}{4}=\frac{2\cdot 6}{4}=\mathbf{3}.$$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

W obliczeniach wykorzystujemy: $\sqrt{2}\approx\mathbf{1{,}41}$, $\sqrt{6}\approx\mathbf{2{,}45}$, $\sqrt{11}\approx\mathbf{3{,}32}$, $\sqrt{30}\approx\mathbf{5{,}48}$.

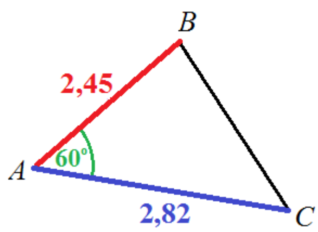
Zaczynamy od odpowiedzi:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx\frac{3\cdot 1{,}41}{2}\approx\mathbf{2{,}12}$ B. **3** C. $\frac{\sqrt{30}}{2}\approx\frac{5{,}48}{2}=\mathbf{2{,}74}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{2}\approx\frac{3{,}32}{2}=\mathbf{1{,}66}$.

Przybliżamy długości boków trójkąta:

$|AB|=\sqrt{6}\approx$ **2,45**,

$|AC|=2\sqrt{2}\approx 2\cdot 1{,}41=$ **2,82**



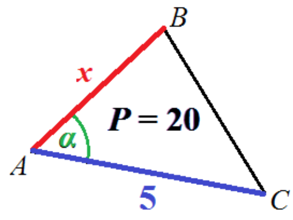
Przybliżamy też wartość $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx\frac{1{,}73}{2}=$ **0,865**.

Dla $\boldsymbol{a}$ **= 2,45**, $\boldsymbol{b}$ **= 2,82** oraz **sin** $\boldsymbol{\alpha}$ = **0,685** wyliczamy pole:

$$P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha\approx 0{,}5\cdot 2{,}45\cdot 2{,}82\cdot 0{,}865\approx\mathbf{2{,}988}.$$

Spośród wyników w odpowiedziach, najbliżej rezultatu **2,988** jest liczba **3**, w odp. **B**.
Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

16.6.
Wykonujemy rysunek.



Oznaczmy kąt $\angle CAB = \alpha$. Wówczas **sin** $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3}$.

Zaznaczając kąt *CAB* na rysunku pamiętamy, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta *CAB* określa położenie kąta.

Oznaczmy szukany bok $|AB| = \boldsymbol{x}$.

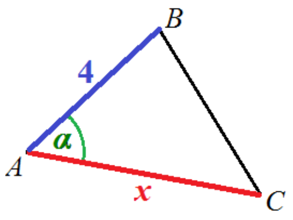
Dla $a = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{5}$, $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3}$, $\boldsymbol{P} = \mathbf{20}$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$,
gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ – kąt leżący **pomiędzy** dwoma **bokami** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ trójkąta.

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$$
$$\frac{1}{2} x \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} = 20$$
$$\frac{x \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 20$$
$$\frac{10x}{6} = 20 \qquad |\cdot 6$$
$$\mathbf{6} \cdot \frac{10x}{6} = \mathbf{6} \cdot 20$$
$$10x = 120 \qquad |:10$$
$$x = \mathbf{12}$$

Odp. **A**

16.7.

Wykonujemy rysunek.



Oznaczmy kąt $\angle BAC = \alpha$. Wówczas **sin** $\alpha = \frac{3}{4}$.

Zaznaczając kąt BAC na rysunku pamiętamy, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta BAC określa położenie kąta.

Oznaczmy szukany bok $|AC| = x$.

Dla $a = x$, $b = 4$, **sin** $\alpha = \frac{3}{4}$, $P = 3$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$, gdzie α – kąt leżący **pomiędzy** dwoma **bokami** a, b trójkąta.

$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$

$\frac{1}{2} x \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

$\frac{x \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 3$

$\frac{12x}{8} = 3 \qquad | \cdot 8$

$\mathbf{8} \cdot \frac{12x}{8} = \mathbf{8} \cdot 3$

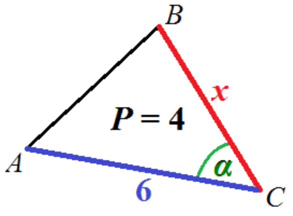
$12x = 24 \qquad |:12$

$x = \mathbf{2}$

Odp. **D**

16.8.

Wykonujemy rysunek.



Oznaczmy kąt $\angle ACB = \alpha$. Wówczas **sin** $\alpha = \frac{1}{6}$.

Zaznaczając kąt ACB na rysunku pamiętamy, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta ACB określa położenie kąta.

Oznaczmy szukany bok $|BC| = x$.

Dla $a = x$, $b = 6$, **sin** $\alpha = \frac{1}{6}$, $P = 4$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$, gdzie α – kąt leżący **pomiędzy** dwoma **bokami** a, b trójkąta.

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$$

$$\frac{1}{2} x \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 4$$

$$\frac{x \cdot 6 \cdot 1}{2 \cdot 6} = 4$$

$$\frac{6x}{12} = 4 \qquad |\cdot 12$$

$$\mathbf{12} \cdot \frac{6x}{12} = \mathbf{12} \cdot 4$$

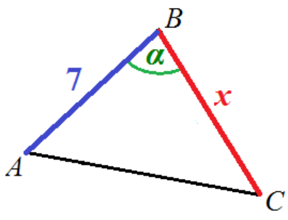
$$6x = 48 \qquad |:6$$

$$x = \mathbf{8}$$

Odp. **C**

16.9.

Wykonujemy rysunek.



Oznaczmy kąt $\angle CBA = \alpha$. Wówczas **sin** $\alpha = \frac{3}{5}$.

Zaznaczając kąt CBA na rysunku pamiętamy, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta CBA określa położenie kąta.

Oznaczmy szukany bok $|BC| = x$ oraz zapisujemy pole trójkąta jako $P = \frac{189}{10} = \mathbf{18{,}9}$.

Dla $a = x$, $b = 7$, **sin** $\alpha = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P = 18{,}9}$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$, gdzie α – kąt leżący **pomiędzy** dwoma **bokami** a, b trójkąta.

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = P$$

$$\frac{1}{2} x \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 18{,}9$$

$$\frac{x \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 18{,}9$$

$$\frac{21x}{10} = 18{,}9 \qquad | \cdot 10$$

$$\mathbf{10} \cdot \frac{21x}{10} = \mathbf{10} \cdot 18{,}9$$

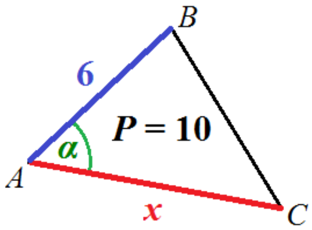
$$21x = 189 \qquad |:21$$

$$x = \mathbf{9}$$

Odp. **B**

16.10.

Wykonujemy rysunek.



Oznaczmy kąt $\angle CAB = \alpha$. Wówczas **sin** $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}$.

Zaznaczając kąt CAB na rysunku pamiętamy, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu kąta CAB określa położenie kąta.

Oznaczmy szukany bok $|AC| = \boldsymbol{x}$.

Dla $a = \boldsymbol{x}$, $b = 6$, $\sin \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}$, $\boldsymbol{P} = \mathbf{10}$ korzystamy ze wzoru na pole trójkąta:

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha = P$$

$$\frac{1}{2} x \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$\frac{x \cdot 6 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 10$$

$$\frac{6x}{6} = 10$$

$$x = \mathbf{10}$$

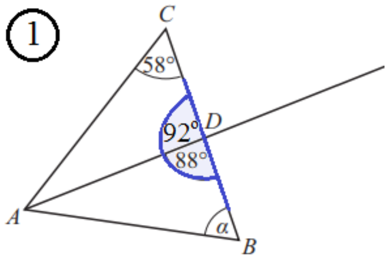
Odp. **B**

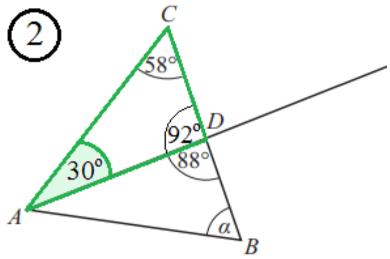
16.11.

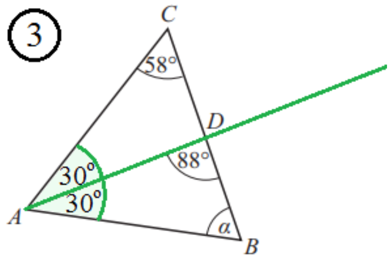
Z własności kątów przyległych, $|\angle CDA| = 180° - 88° =$ **92°** (rys. 1).

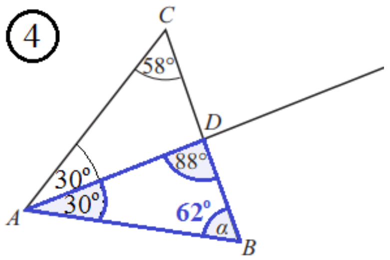
Z sumy miar kątów w ΔCDA liczymy brakujący kąt $|\angle CAD| = 180° - 92° - 58° =$ **30°** (rys. 2).

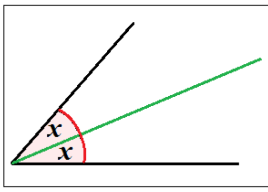
Półprosta AD jest **dwusieczną** kąta CAB, więc jeśli $|\angle CAD| =$ **30°**, to $|\angle DAB| =$ **30°** (rys. 3).











Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca kąt na dwie równe części

Określenie „dwusieczna" odnosi się **zawsze** do kąta

Z sumy miar kątów w ΔADB liczymy miarę kąta $\boldsymbol{\alpha}$.

Zatem $\alpha = 180° - 88° - 30° =$ **62°** (rys. 4).

Odczytujemy wartość **cos 62°** (**karta wzorów**, str. 20).

$\alpha\,[°]$	$\sin\alpha$ / $\boxed{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\boxed{\beta\,[°]}$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
•••	•••	•••	•••
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	$\boxed{0{,}4695}$	0,5317	$\boxed{62}$
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58

Okazuje się, że przybliżona wartość

cos 62° $\approx$ **0,4695**

Ponieważ **0,4695** $< \frac{1}{2}$, to spełniony jest warunek

$$\underbrace{\cos\alpha}_{0,4695} < \frac{1}{2}.$$

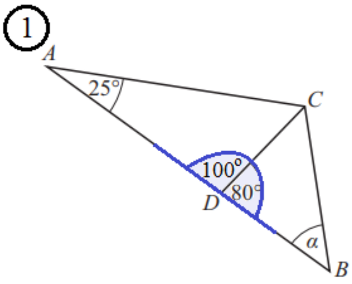
Odp. **A**

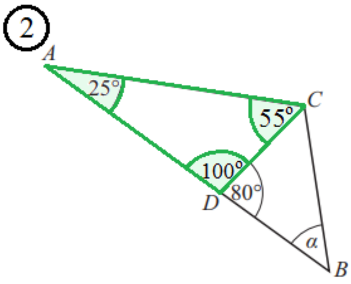
16.12.

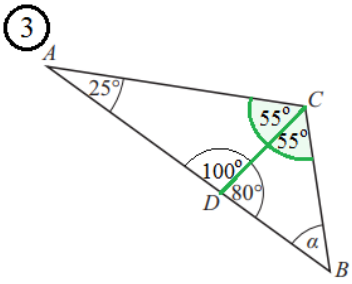
Z własności kątów przyległych, $|\angle ADC| = 180° - 80° =$ **100^o** (rys. 1).

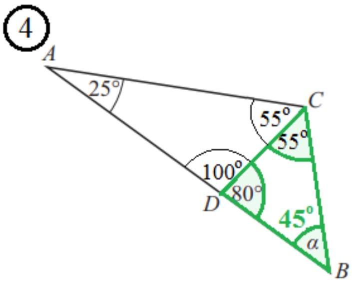
Z sumy miar kątów w ΔADC liczymy kąt $|\angle ACD| = 180° - 100° - 25° =$ **55^o** (rys. 2).

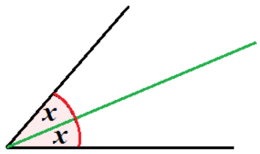
Dwusieczna kąta ACB zawiera odcinek CD – jeśli $|\angle ACD| =$ **55^o**, to $|\angle DCB| =$ **55^o** (rys. 3).











Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca kąt na dwie równe części

Określenie „dwusieczna" odnosi się **zawsze** do kąta

Z sumy miar kątów w ΔCDB obliczamy miarę kąta $\boldsymbol{\alpha}$.

Zatem $\alpha = 180° - 80° - 55° =$ **45^o** (rys. 4).

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Odczytujemy $tg\,45° = \mathbf{1}$, zatem spełniony jest warunek $1 \le tg\,\alpha < \sqrt{3}$, który **dopuszcza** $tg\,\alpha = 1$.

Odp. **C**

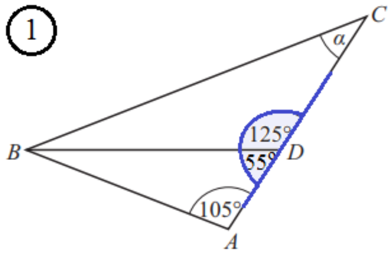
16.13.

Z własności kątów przyległych, $|\angle BDA| = 180° - 125° =$ **55°** (rys. 1).

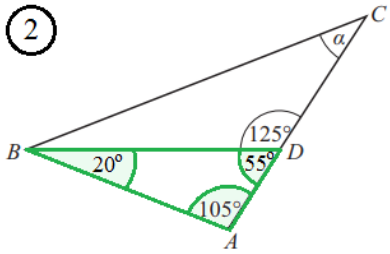
Z sumy miar kątów w **Δ***BDA* liczymy kąt $|\angle ABD| = 180° - 105° - 55° =$ **20°** (rys. 2).

Dwusieczna kąta *ACB* zawiera odcinek *BD* – jeśli $|\angle ABD| =$ **20°**, to $|\angle CBD| =$ **20°** (rys. 3).

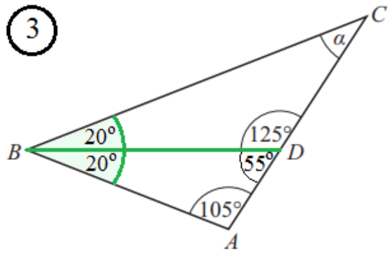
1



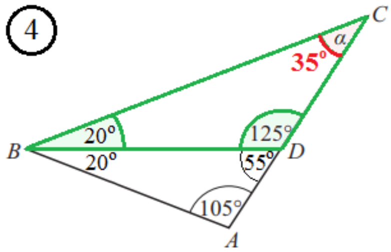
2

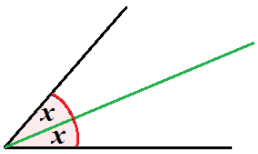


3



4





Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca kąt na dwie równe części

Określenie „dwusieczna" odnosi się **zawsze** do kąta

$\alpha\,[°]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta\,[°]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
•••	•••	•••	•••
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53

Z sumy miar kątów w **Δ***CBD* obliczamy miarę kąta ***α***.

Zatem $\alpha = 180° - 125° - 20° =$ **35°** (rys. 4).

Odczytujemy **sin 35°** (**karta wzorów**, str. 20).

Zatem **sin 35°** ≈ **0,5736**.

Ponieważ $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}41}{2} = \mathbf{0{,}705}$, to spełniony jest warunek $\underbrace{\sin\alpha}_{0{,}5736} < \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{0{,}705}$.

Odp. **B**

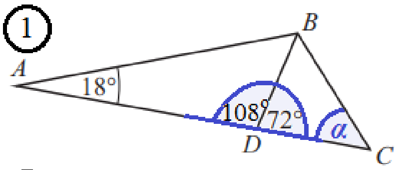
16.14.

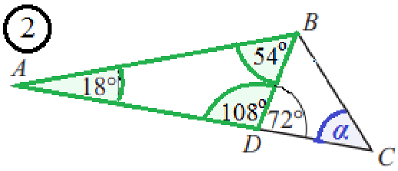
Oznaczamy **szukany** kąt *BCA* jako $\boldsymbol{\alpha}$ pamiętając, że **środkowa litera** w trzyliterowym oznaczeniu *BCA* określa położenie kąta.

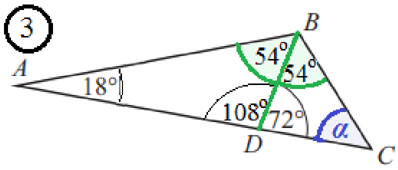
Ponadto, z własności kątów przyległych, $|\angle ADB| = 180° - 72° = \mathbf{108^o}$ (rys. 1).

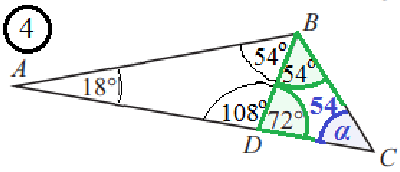
Z sumy miar kątów w ΔADB liczymy kąt $|\angle ABD| = 180° - 108° - 18° = \mathbf{54^o}$ (rys. 2).

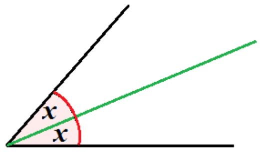
Dwusieczna kąta *ABC* zawiera odcinek *BD* – jeśli $|\angle ABD| = \mathbf{54^o}$, to $|\angle DBC| = \mathbf{54^o}$ (rys. 3).

1


2


3


4




Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca kąt na dwie równe części

Określenie „dwusieczna" odnosi się **zawsze** do kąta

Z sumy miar kątów w ΔBDC liczymy miarę kąta $\boldsymbol{\alpha}$.

Zatem $\alpha = 180° - 72° - 54° = \mathbf{54^o}$ (rys. 4).

Odczytujemy wartość **cos 54°** (**karta wzorów**, str. 20).

Okazuje się, że przybliżona wartość

cos 54° ≈ **0,5878**.

Zatem spełniony jest warunek $0{,}4 < \underbrace{\cos\beta}_{0{,}5878} < 0{,}6$, bo liczba

0,5878 znajduje się **pomiędzy** liczbami **0,4** oraz **0,6**.

Odp. **B**

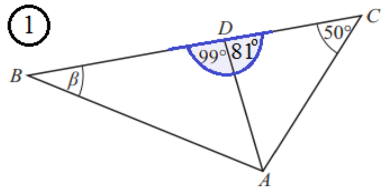
$\alpha\,[°]$	$\sin\alpha$ / $\boxed{\cos\beta}$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\boxed{\beta\,[°]}$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
•••	•••	•••	•••
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	$\boxed{0{,}5878}$	0,7265	$\boxed{54}$
37	0,6018	0,7536	53

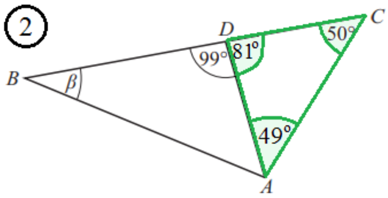
16.15.

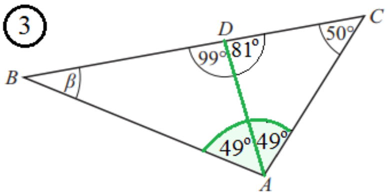
Z własności kątów przyległych, $|\angle ADC| = 180° - 99° = \mathbf{81^o}$ (rys. 1).

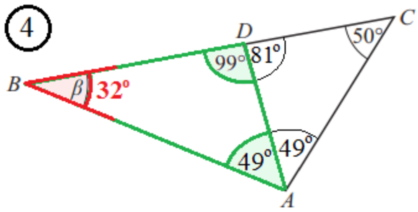
Z sumy miar kątów w ΔADC liczymy kąt $|\angle DAC| = 180° - 81° - 50° = \mathbf{49^o}$ (rys. 2).

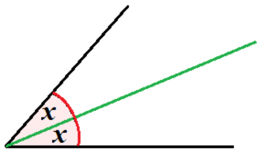
Dwusieczna kąta BAC zawiera odcinek AD – jeśli $|\angle DAC| =$ **49º**, to $|\angle BAD| =$ **49º** (rys. 3).

1


2


3


4




Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca kąt na dwie równe części

Określenie „dwusieczna" odnosi się **zawsze** do kąta

Z sumy miar kątów w ΔBDA liczymy miarę kąta $\boldsymbol{\beta}$.

Zatem
$\beta = 180° - 99° - 49° = \mathbf{32^o}$
(rys. 4).

Odczytujemy wartości **sin 32º** oraz **cos 32º** (**karta wzorów**, str. 20).

$\alpha\,[°]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta\,[°]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
•••	•••	•••	•••
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58

$\alpha\,[°]$	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta\,[°]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31

Okazuje się, że przybliżone wartości **sin 32º** $\approx$ **0,5299** oraz **cos 32º** $\approx$ **0,8480**.

Zatem spełniony jest warunek $\underbrace{\cos\beta}_{0{,}8480} < 0{,}85$, bo liczba **0,8480** jest mniejsza od **0,85**.

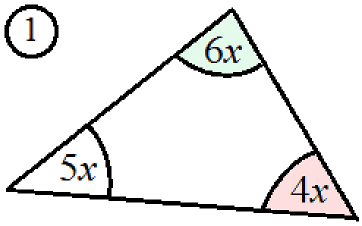
Odp. **D**

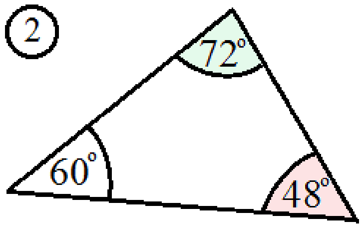
16.16.

$4x + 5x + 6x = 180°$

$15x = 180° \qquad |:15$

$x = 12°$





Obliczamy kąty trójkąta:

$4x = 4 \cdot 12° = \mathbf{48}°$

$5x = 5 \cdot 12° = \mathbf{60}°$

$6x = 6 \cdot 12° = \mathbf{72}°$

Najmniejszy kąt ma miarę **48°**, zaś największy **72°**. Suma ich miar to 48° + 72° = **120°**.

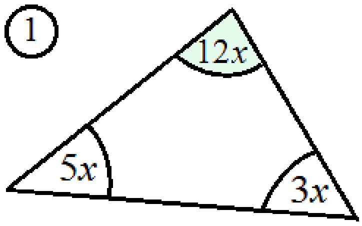
Odp. **A**

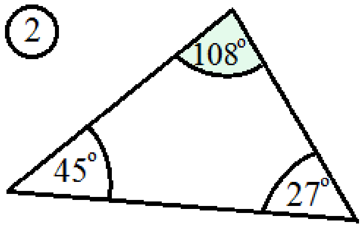
16.17.

$12x + 5x + 3x = 180°$

$20x = 180° \quad |:20$

$x = 9°$





Obliczamy kąty trójkąta:

$12x = 12 \cdot 9° = \mathbf{108}°$

$5x = 5 \cdot 9° = \mathbf{45}°$

$3x = 3 \cdot 9° = \mathbf{27}°$

Największy kąt trójkąta ma miarę **108°**.

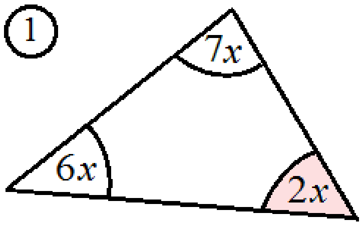
Odp. **C**

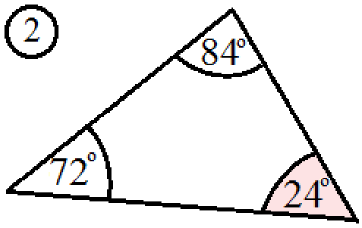
16.18.

$2x + 6x + 7x = 180°$

$15x = 180° \qquad |:15$

$x = 12°$





Obliczamy kąty trójkąta:

$2x = 2 \cdot 12° = \mathbf{24}°$

$6x = 6 \cdot 12° = \mathbf{72}°$

$7x = 7 \cdot 12° = \mathbf{84}°$

Najmniejszy kąt trójkąta ma miarę **24°**.

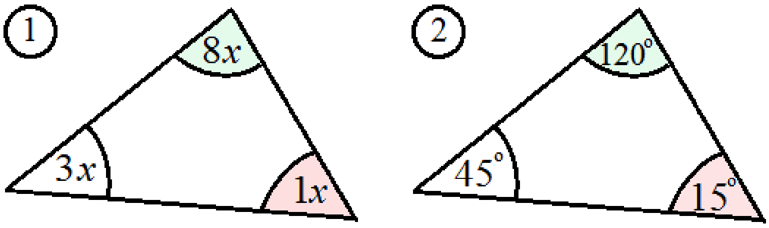
Odp. **B**

16.19.

$8x + 3x + 1x = 180°$

$12x = 180° \qquad |:12$

$x = 15°$



Obliczamy kąty trójkąta:

$8x = 8 \cdot 15° = \mathbf{120°}$

$3x = 3 \cdot 15° = \mathbf{45°}$

$1x = 1 \cdot 15° = \mathbf{15°}$

Najmniejszy kąt ma miarę **15°**, a największy **120°**. Suma ich miar wynosi 15° + 120° = **135°**.

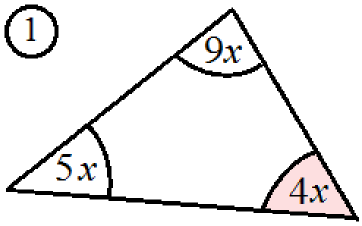
Odp. **C**

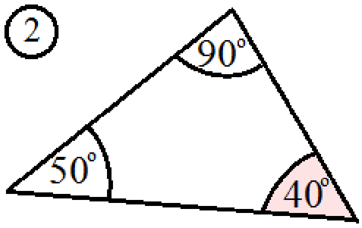
16.20.

$9x+5x+4x=180°$

$18x=180° \qquad |:18$

$x=10°$





Obliczamy kąty trójkąta:

$9x=9\cdot 10°=\mathbf{90}°$

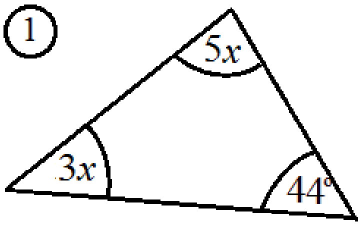
$5x=5\cdot 10°=\mathbf{50}°$

$4x=4\cdot 10°=\mathbf{40}°$

Najmniejszy kąt trójkąta ma miarę **40°**.

Odp. **A**

16.21.
Miary kątów trójkąta to: **44º**, **5*x***, **3*x*** (rys. 1).



$44° + 5x + 3x = 180°$

$44° + 8x = 180°$

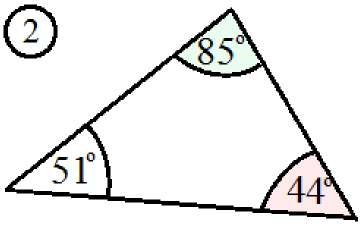
$8x = 180° - 44°$

$8x = 136° \qquad |:8$

$x = 17°$

Obliczamy miary kątów **5*x***, **3*x***:
$5x = 5 \cdot 17° = \mathbf{85}°$

$3x = 3 \cdot 17° = \mathbf{51}°$

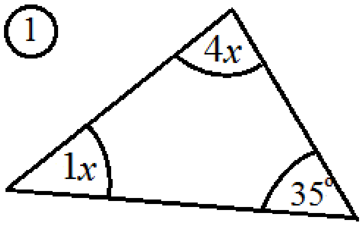


Okazało się, że kąty trójkąta
mają miary: **44º**, **51º**, **85º** (rys. 2).

Szukana różnica wynosi 85º – 44º = **41º**.

Odp. **B**

16.22.
Miary kątów trójkąta to: **35º**, **1*x***, **4*x*** (rys. 1).



$35° + 1x + 4x = 180°$

$35° + 5x = 180°$

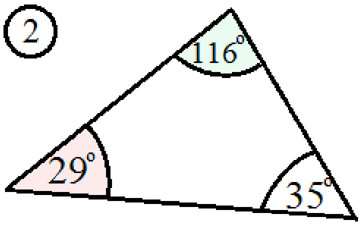
$5x = 180° - 35°$

$5x = 145° \qquad |:5$

$x = 29°$

Obliczamy miary kątów **1*x***, **4*x***:
$1x = 1 \cdot 29° = \mathbf{29}°$

$4x = 4 \cdot 29° = \mathbf{116}°$



Okazało się, że kąty trójkąta
mają miary: **29º**, **35º**, **116º** (rys. 2).

Szukana suma wynosi 116º + 29º = **145º**.

Odp. **A**

16.23.

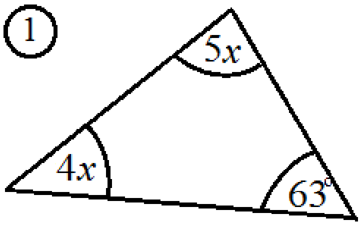
Miary kątów trójkąta to: **5*x***, **4*x***, **63°** (rys. 1).

$$5x + 4x + 63° = 180°$$

$$9x = 180° - 63°$$

$$9x = 117° \qquad |:9$$

$$x = 13°$$

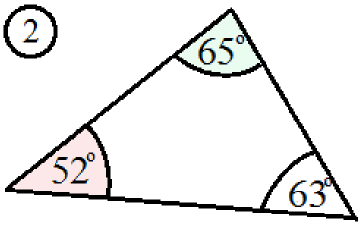


Obliczamy miary kątów **5*x***, **4*x***:

$$5x = 5 \cdot 13° = \mathbf{65°}$$

$$4x = 4 \cdot 13° = \mathbf{52°}$$

Okazało się, że kąty trójkąta
mają miary: **52°**, **63°**, **65°** (rys. 2).



Szukana różnica wynosi 65° – 52° = **13°**.

Odp. **D**

16.24.

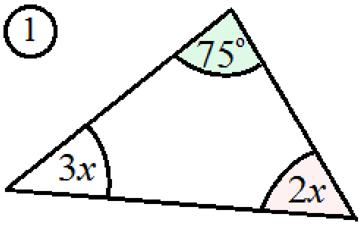
Miary kątów trójkąta to: **75°**, **2*x***, **3*x*** (rys. 1).

$75° + 2x + 3x = 180°$

$5x = 180° - 75°$

$5x = 105° \qquad |:5$

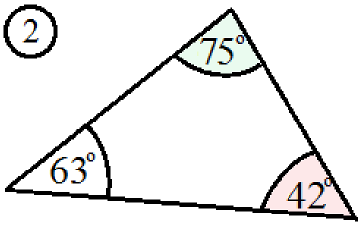
$x = 21°$



Obliczamy miary kątów **2*x***, **3*x***:

$2x = 2 \cdot 21° = \mathbf{42}°$

$3x = 3 \cdot 21° = \mathbf{63}°$



Okazało się, że kąty trójkąta mają miary: **42°**, **63°**, **75°** (rys. 2).

Najmniejszy kąt ma miarę **42°**.

Odp. **D**

16.25.

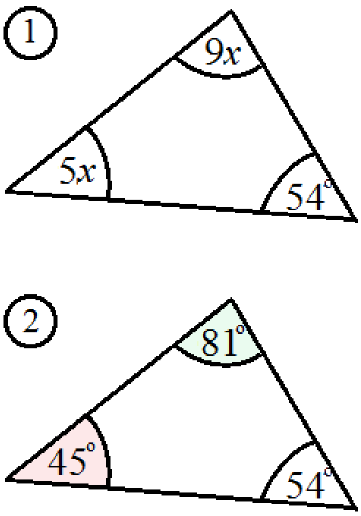
Miary kątów trójkąta to: **54°**, **9*x***, **5*x*** (rys. 1).

$54° + 9x + 5x = 180°$

$14x = 180° - 54°$

$14x = 126° \qquad |:14$

$x = 9°$



Obliczamy miary kątów **9*x***, **5*x***:

$9x = 9 \cdot 9° = \mathbf{81}°$

$5x = 5 \cdot 9° = \mathbf{45}°$

Okazało się, że kąty trójkąta
mają miary: **45°**, **54°**, **81°** (rys. 2).

Największy kąt trójkąta ma miarę **81°**.

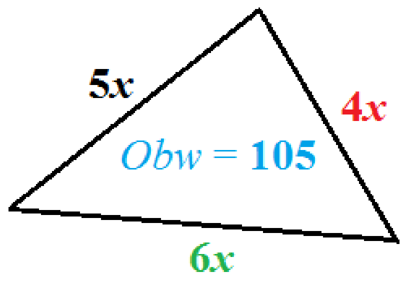
Odp. **B**

16.26.

$6x + 5x + 4x = 105$

$15x = 105 \qquad |:15$

$x = 7$



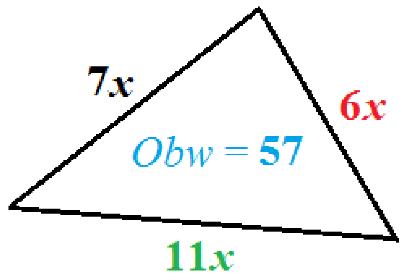
Najkrótszy bok trójkąta ma długość **4*x***.
Zatem $4x = 4 \cdot 7 =$ **28**.

Odp. **D**

Uwaga! *W odpowiedziach do tego zadania w książce widnieje błędna odp. C.*
Wydawnictwo Aksjomat oraz autor przepraszają za błąd w książce.

16.27.

$$6x + 7x + 11x = 57$$
$$24x = 57 \qquad |:24$$
$$x = \frac{57}{24}$$



Najdłuższy bok trójkąta ma długość **11*x***.

Zatem $11x = 11 \cdot \frac{57}{24} = \mathbf{26{,}125}$.

Sprawdzamy **odpowiedzi**:

A. $\frac{57}{11} \approx 5{,}1818...$ B. $\frac{209}{8} = \mathbf{26{,}125}$ C. $\frac{88}{19} \approx 4{,}6316...$ D. $\frac{57}{2} = 28{,}5$

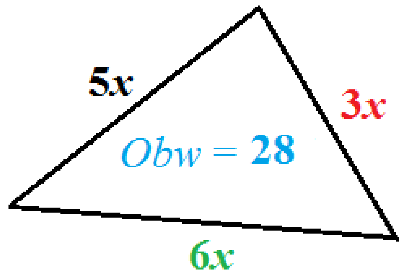
Odp. **B**

16.28.

$3x + 5x + 6x = 28$

$14x = 28 \qquad |:14$

$x = 2$



Najkrótszy bok trójkąta ma długość **$3x$**.
Zatem $3x = 3 \cdot 2 =$ **6**.

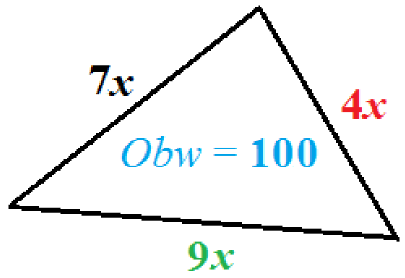
Odp. **D**

16.29.

$7x + 4x + 9x = 100$

$20x = 100 \qquad |:20$

$x = 5$



Najdłuższy bok trójkąta ma długość $\mathbf{9x}$.
Zatem $9x = 9 \cdot 5 =$ **45**.

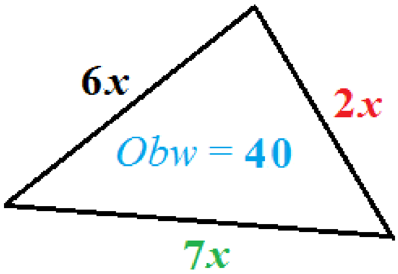
Odp. **C**

16.30.

$6x+7x+2x=40$

$15x=40 \qquad |:15$

$x=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$



Najkrótszy bok ma długość **$2x$**, zaś najdłuższy **$7x$**.

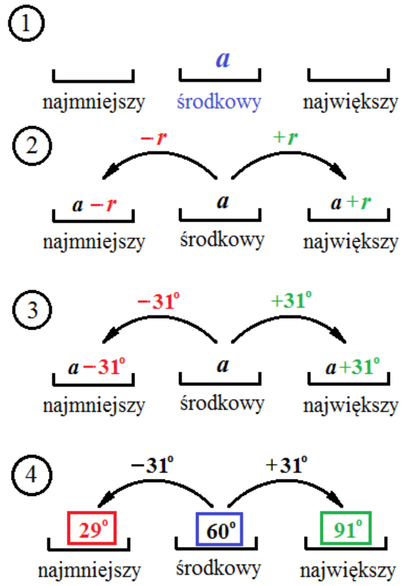
Zatem $2x=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ oraz $7x=7\cdot\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$.

Suma **$2x$** + **$7x$** $=\frac{16}{3}+\frac{56}{3}=\frac{72}{3}=\mathbf{24}$.

Odp. **A**

16.31.

Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako ***a*** (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu *r*** (rys. 2) otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 3).



Z sumy miar kątów trójkąta:

$a - 31° + a + a + 31° = 180°$

$3a = 180°$,

$\boldsymbol{a = 60°}$.

Liczymy najmniejszy i największy kąt:

$60° - 31° = 29°$ oraz największy:

$60° + 31° = 91°$ (rys. 4).

Rodzaj trójkąta możemy rozpoznać po mierze największego kąta.

Ponieważ największy kąt 91° jest kątem **rozwartym** (czyli większym niż 90°), to trójkąt jest **rozwartokątny**.

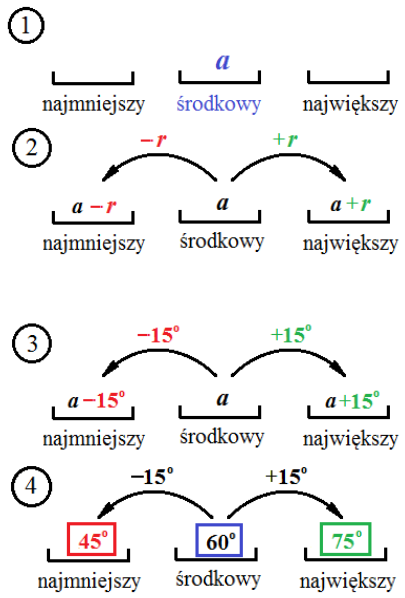
Odp. **C**

Uwaga! Wiedząc, że miary kątów trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny** wnioskujemy, że zawsze średni kąt ***a* = 60°** i do tego wnioskowania **nie musimy** znać różnicy ciągu!

16.32.

Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako $\boldsymbol{a}$ (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu** $\boldsymbol{r}$ (rys. 2)

otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 3).



Z sumy miar kątów trójkąta:

$$a - 15° + a + a + 15° = 180°$$

$$3a = 180°,$$

$$\boldsymbol{a = 60°}.$$

Liczymy najmniejszy i największy kąt:
$60° - 15° = 45°$ oraz największy:
$60° + 15° = 75°$ (rys. 4).

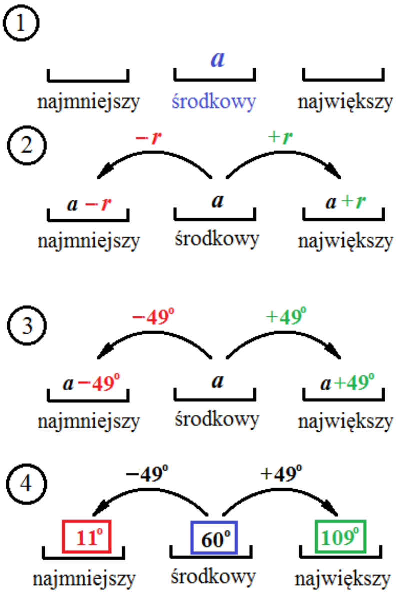
Najmniejszy kąt trójkąta ma miarę **45°**.

Odp. **B**

Uwaga! Wiedząc, że miary kątów trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny** wnioskujemy, że zawsze średni kąt $\boldsymbol{a = 60°}$ i do tego wnioskowania **nie musimy** znać różnicy ciągu!

16.33.

Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako $\boldsymbol{a}$ (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu *r*** (rys. 2) otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 3).



Z sumy miar kątów trójkąta:

$a - 49° + a + a + 49° = 180°$

$3a = 180°$,

$\boldsymbol{a = 60°}$.

Liczymy najmniejszy i największy kąt:
$60° - 49° = 11°$ oraz największy:
$60° + 49° = 109°$ (rys. 4).

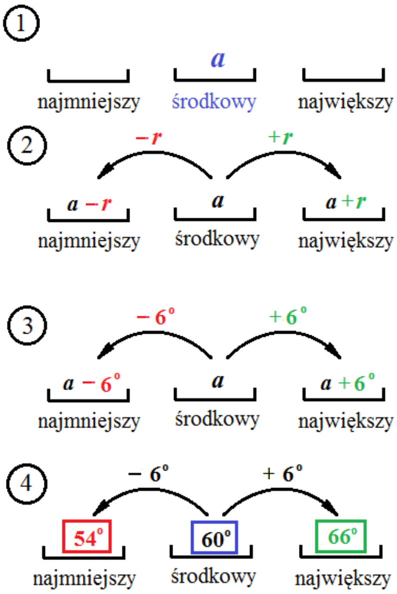
Największy kąt trójkąta ma miarę **109°**.

Odp. **D**

Uwaga! Wiedząc, że miary kątów trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny** wnioskujemy, że zawsze średni kąt $\boldsymbol{a = 60°}$ i do tego wnioskowania **nie musimy** znać różnicy ciągu!

16.34.

Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako ***a*** (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu *r*** (rys. 2) otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 3).



Z sumy miar kątów trójkąta:

$a - 6° + a + a + 6° = 180°$

$3a = 180°$,

$\boldsymbol{a = 60°}$.

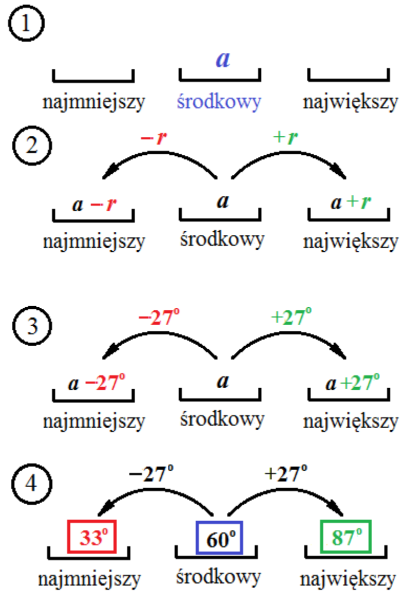
Liczymy najmniejszy i największy kąt:
$60° - 6° = 54°$ oraz największy:
$60° + 6° = \mathbf{66°}$ (rys. 4).

Największy kąt trójkąta ma miarę **66°**.

Odp. **C**

Uwaga! Wiedząc, że miary kątów trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny** wnioskujemy, że zawsze średni kąt ***a* = 60°** i do tego wnioskowania **nie musimy** znać różnicy ciągu!

16.35.
Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako ***a*** (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu *r*** (rys. 2) otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 3).



Z sumy miar kątów trójkąta:
$a - 27° + a + a + 27° = 180°$
$3a = 180°$,
$\boldsymbol{a = 60^o}$.

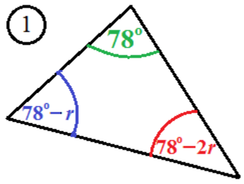
Liczymy najmniejszy i największy kąt:
$60^o - 27^o = \mathbf{33^o}$ oraz największy:
$60^o + 27^o = 87^o$ (rys. 4).

Najmniejszy kąt trójkąta ma miarę **33º**.

Odp. **A**

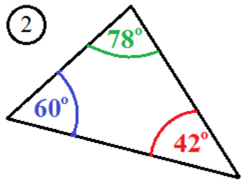
Uwaga! Wiedząc, że miary kątów trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny** wnioskujemy, że zawsze średni kąt $\boldsymbol{a = 60^o}$ i do tego wnioskowania **nie musimy** znać różnicy ciągu!

16.36.
Oznaczamy kąty trójkąta jako **78^o**, **$78^o – r$**, **$78^o – 2r$** (rys. 1).



Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie
$78° + 78° - r + 78° - 2r = 180°$, które rozwiązujemy:

$$234° - 3r = 180°$$
$$-3r = 180° - 234°$$
$$-3r = -54° \qquad |:(-3)$$
$$r = 18°$$

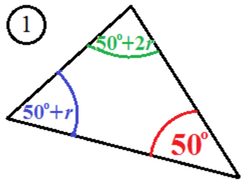


Obliczamy miary pozostałych kątów:
$78^o – r$ $= 78^o – 18^o =$ **60^o**
$78^o – 2r$ $= 78^o – 2 \cdot 18^o = 78^o – 36^o =$ **42^o** (rys. 2).

Liczymy różnicę największego i najmniejszego kąta: **78^o** – **42^o** = **36^o**.

Odp. **C**

16.37.
Oznaczamy kąty trójkąta jako **50^o**, **50^o+r**, **50^o+2r** (rys. 1).



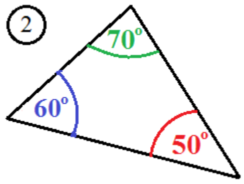
Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie
$50°+50°+r+50°+2r=180°$, które rozwiązujemy:

$150°+3r=180°$

$3r=180°-150°$

$3r=30° \qquad |:3$

$r=10°$

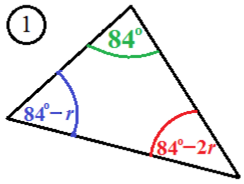


Obliczamy miary pozostałych kątów:
50^o+r $= 50^o + 10^o =$ **60^o**
50^o+2r $= 50^o + 2\cdot10^o = 50^o + 20^o =$ **70^o** (rys. 2).

Największy kąt tego trójkąta ma miarę **70^o**.

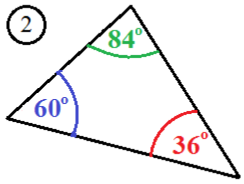
Odp. **B**

16.38.
Oznaczamy kąty trójkąta jako **84º**, ***84º–r***, ***84º–2r*** (rys. 1).



Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie
$84° + 84° - r + 84° - 2r = 180°$, które rozwiązujemy:

$$252° - 3r = 180°$$
$$-3r = 180° - 252°$$
$$-3r = -72° \qquad |:(-3)$$
$$r = 24°$$



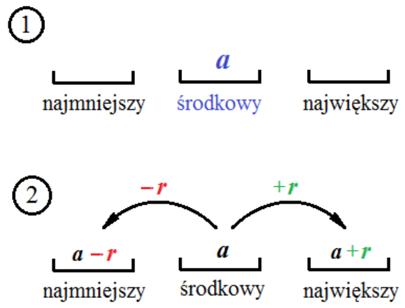
Obliczamy miary pozostałych kątów:
84º–r = 84º – 24º = **60º**
84º–2r = 84º – 2·24º = 84º – 48º = **36º** (rys. 2).

Najmniejszy kąt tego trójkąta ma miarę **36º**.

Odp. **D**

16.39.

Najpierw oznaczamy miarę średniego kąta jako ***a*** (rys. 1), następnie przez dodanie i odjęcie **różnicy ciągu *r*** otrzymujemy najmniejszy i największy kąt (rys. 2).



Z sumy miar kątów trójkąta:

$a - r + a + a + r = 180°$

$3a = 180°$,

$\boldsymbol{a = 60°}$.

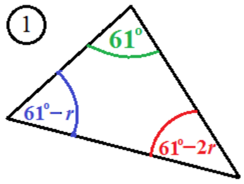
Wówczas suma miar najmniejszego i największego kąta jest równa:

$\mathbf{60°} - r + \mathbf{60°} + r = 60° + 60° = \mathbf{120°}$.

Odp. **A**

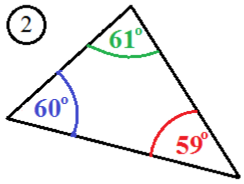
16.40.

Oznaczamy kąty trójkąta jako **61°**, ***61°–r***, ***61°–2r*** (rys. 1).



Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie
$61° + 61° - r + 61° - 2r = 180°$, które rozwiązujemy:

$$183° - 3r = 180°$$
$$-3r = 180° - 183°$$
$$-3r = -3° \qquad |:(-3)$$
$$r = 1°$$

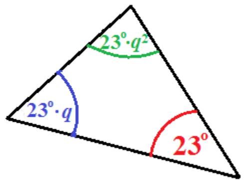


Obliczamy miary pozostałych kątów:
61°–r = 61° – 1° = **60°**
61°–2r = 61° – 2·1° = 61° – 2° = **59°** (rys. 2).

Liczymy różnicę największego i najmniejszego kąta: **61°** – **59°** = **2°**.

Odp. **A**

16.41.
W każdym ciągu geometrycznym, każdy **kolejny** wyraz powstaje poprzez pomnożenie wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego przez stałą, różną od zera liczbę q zwaną **ilorazem ciągu**.



Stąd wynika, że miary kątów trójkąta (uporządkowane od najmniejszego do największego) wynoszą odpowiednio:
$\mathbf{23^o}$, $\mathbf{23^o \cdot q}$, $\mathbf{23^o \cdot q^2}$.

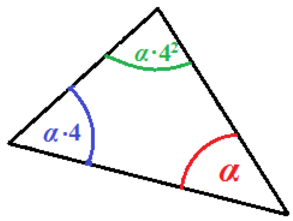
Aby kąt $\mathbf{23^o \cdot q}$ był **większy** od $\mathbf{23^o}$, to iloraz ciągu musi być **większy od 1**, zatem $q > 1$.

Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie $23^o + 23^o \cdot q + 23^o \cdot q^2 = 180^o$.

Odp. **A**

16.42.

W każdym ciągu geometrycznym, każdy **kolejny** wyraz powstaje poprzez **pomnożenie** wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego przez stałą, różną od zera liczbę ***q*** zwaną **ilorazem ciągu**.



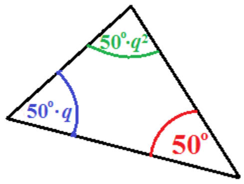
Stąd wynika, że miary kątów trójkąta (uporządkowane od najmniejszego do największego) wynoszą odpowiednio:
α, $\alpha \cdot 4$, $\alpha \cdot 4^2$.

Z sumy miar kątów trójkąta wynika, że $\alpha + \alpha \cdot 4 + \alpha \cdot 4^2 = 180°$, czyli $\alpha + 4\alpha + 16\alpha = 180°$.

Odp. **D**

16.43.

W każdym ciągu geometrycznym, każdy **kolejny** wyraz powstaje poprzez pomnożenie wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego przez stałą, różną od zera liczbę q zwaną **ilorazem ciągu**.



Stąd wynika, że miary kątów trójkąta (uporządkowane od najmniejszego do największego) wynoszą odpowiednio:
50°, $50^{\circ}\cdot q$, $50^{\circ}\cdot q^2$.

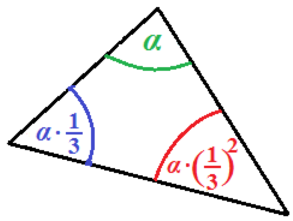
Aby kąt $50^{\circ}\cdot q$ był **większy** od 50°, to iloraz ciągu musi być **większy od 1**, zatem $q > 1$.

Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie $50^{\circ} + 50^{\circ}\cdot q + 50^{\circ}\cdot q^2 = 180^{\circ}$.

Odp. **B**

16.44.

W każdym ciągu geometrycznym, każdy **kolejny** wyraz powstaje poprzez **pomnożenie** wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego przez stałą, różną od zera liczbę ***q*** zwaną **ilorazem ciągu**.



Stąd wynika, że miary kątów trójkąta (uporządkowane od największego do najmniejszego) wynoszą odpowiednio:

$\alpha,\ \alpha \cdot \frac{1}{3},\ \alpha \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2.$

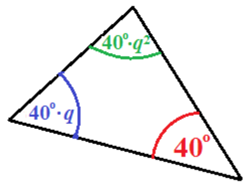
Z sumy miar kątów trójkąta wynika, że $\alpha + \alpha \cdot \frac{1}{3} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 180°$, czyli

$\alpha + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{9}\alpha = 180°.$

Odp. **B**

16.45.

W każdym ciągu geometrycznym, każdy **kolejny** wyraz powstaje poprzez pomnożenie wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego przez stałą, różną od zera liczbę $\boldsymbol{q}$ zwaną **ilorazem ciągu**.



Stąd wynika, że miary kątów trójkąta (uporządkowane od najmniejszego do największego) wynoszą odpowiednio:
$\mathbf{40^o}$, $\mathbf{40^o \cdot q}$, $\mathbf{40^o \cdot q^2}$.

Aby kąt $\mathbf{40^o \cdot q}$ był **większy** od $\mathbf{40^o}$, to iloraz ciągu musi być **większy od 1**, zatem $\boldsymbol{q > 1}$.

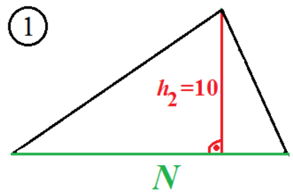
Z sumy miar kątów trójkąta mamy równanie $\mathbf{40^o} + \mathbf{40^o \cdot q} + \mathbf{40^o \cdot q^2} = \mathbf{180^o}$.

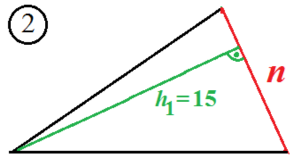
Odp. **B**

16.46.

Najdłuższemu bokowi trójkąta odpowiada najkrótsza wysokość (rys. 1).

Najkrótszemu bokowi trójkąta odpowiada najdłuższa wysokość (rys. 2).





Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2}a \cdot h = P$ wynika, że:

$\frac{1}{2}N \cdot h_2 = P$ (rys. 1)

$\frac{1}{2}n \cdot h_1 = P$ (rys. 2)

Zatem:

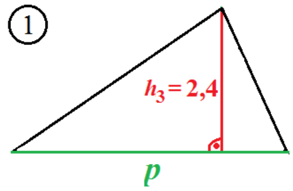
$$\frac{1}{2}N \cdot h_2 = P$$
$$\frac{1}{2}N \cdot 10 = 90$$
$$5N = 90 \quad |:5$$
$$N = \mathbf{18}$$

$$\frac{1}{2}n \cdot h_1 = P$$
$$\frac{1}{2}n \cdot 15 = 90$$
$$7{,}5n = 90 \quad |:7{,}5$$
$$n = \mathbf{12}$$

Odp. **A**

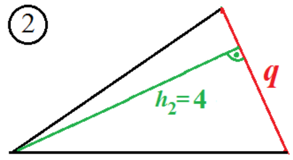
16.47.

Wysokość $h_3 = \frac{12}{5} = \mathbf{2{,}4}$, więc $h_2 = \mathbf{4}$ to najdłuższa wysokość, zaś $h_3 = \mathbf{2{,}4}$ to najkrótsza wysokość.



Najdłuższemu bokowi trójkąta odpowiada najkrótsza wysokość (rys. 1).

Najkrótszemu bokowi trójkąta odpowiada najdłuższa wysokość (rys. 2).



Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} a \cdot h = P$ wynika, że:

$\frac{1}{2} p \cdot h_3 = P$ (rys. 1)

$\frac{1}{2} q \cdot h_2 = P$ (rys. 2)

Zatem:

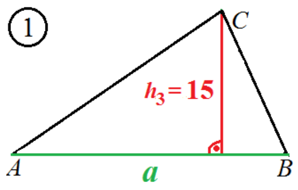
$$\frac{1}{2} p \cdot h_3 = P$$
$$\frac{1}{2} p \cdot 2{,}4 = 6$$
$$1{,}2 p = 6 \qquad |:1{,}2$$
$$p = \mathbf{5}$$

$$\frac{1}{2} q \cdot h_2 = P$$
$$\frac{1}{2} q \cdot 4 = 6$$
$$2q = 6 \qquad |:2$$
$$q = \mathbf{3}$$

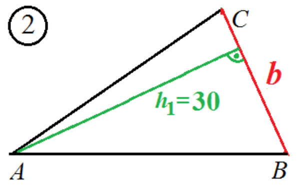
Odp. **C**

16.48.

Najdłuższemu bokowi trójkąta odpowiada najkrótsza wysokość (rys. 1).



Najkrótszemu bokowi trójkąta odpowiada najdłuższa wysokość (rys. 2).



Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2}a \cdot h = P$ wynika, że:

$\frac{1}{2}a \cdot h_3 = P$ (rys. 1)

$\frac{1}{2}b \cdot h_1 = P$ (rys. 2)

Zatem:

$$\frac{1}{2}a \cdot h_3 = P$$

$$\frac{1}{2}a \cdot 15 = 360$$

$$7{,}5a = 360 \qquad |:7{,}5$$

$$a = \mathbf{48}$$

$$\frac{1}{2}b \cdot h_1 = P$$

$$\frac{1}{2}b \cdot 30 = 360$$

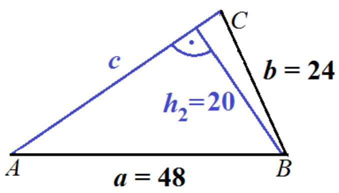
$$15b = 360 \qquad |:15$$

$$b = \mathbf{24}$$

Odp. **A**

16.49.

Długość boku $\boldsymbol{b} = \mathbf{24}$ została wyliczona w rozwiązaniu zadania 16.48.



Obliczamy długość boku ***c***, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2}c \cdot h_2 = P$. Zatem:

$$\frac{1}{2}c \cdot 20 = 360$$

$$10c = 360 \qquad |:10$$

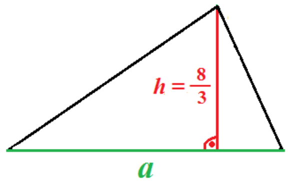
$$c = \mathbf{36}$$

Obliczamy obwód trójkąta, zatem: $Obw = a + b + c = 48 + 24 + 36 = \mathbf{108}$.

Odp. **A**

16.50.

Najdłuższemu bokowi trójkąta odpowiada najkrótsza wysokość.



Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2}a \cdot h = P$ wynika, że:

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{8}{3} = 8$ → z powstałego równania wyliczamy a.

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{8}{3} = 8$$

$$\frac{8a}{6} = 8 \qquad |\cdot 6$$

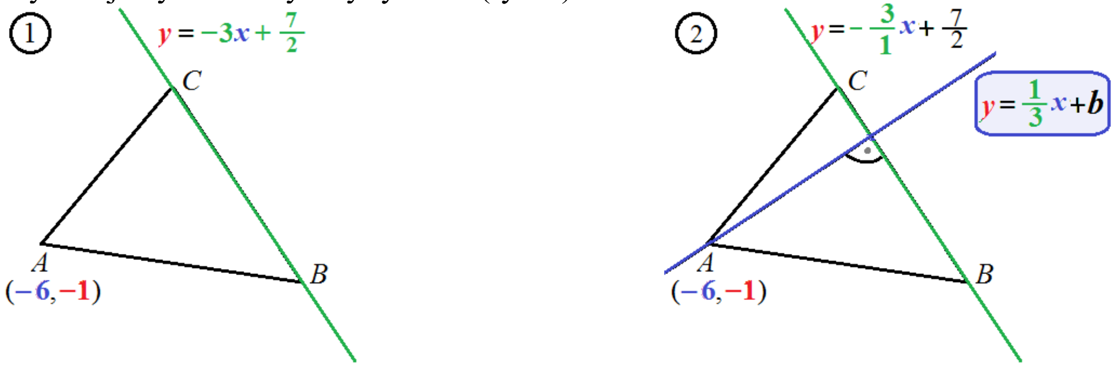
$$\mathbf{6} \cdot \frac{8a}{6} = \mathbf{6} \cdot 8$$

$$8a = 48 \qquad |:8$$

$$a = \mathbf{6}$$

Odp. **C**

16.51.
Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).



Równanie prostej BC, czyli $y=-3x+\frac{7}{2}$, zapisujemy jako $y=-\frac{3}{1}x+\frac{7}{2}$.
Prosta zawierająca szukaną wysokość jest **prostopadła** do prostej BC (rys. 2).
Ze względu na to, odwracamy licznik z mianownikiem we współczynniku a i zmieniamy później znak na przeciwny:

$$-\frac{3}{1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad a_{*}=\frac{1}{3}$$

Otrzymujemy $y=\frac{1}{3}x+b$ (rys. 2).

Do równania $y=\frac{1}{3}x+b$ podstawiamy $\boldsymbol{x=-6}$, $\boldsymbol{y=-1}$, czyli współrzędne danego punktu A, potem wyliczamy b.

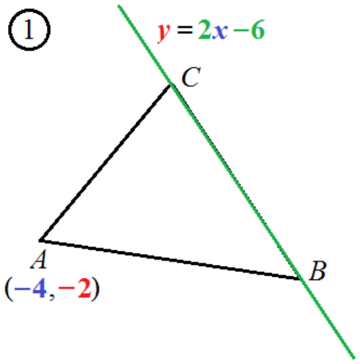
$$-1=\frac{1}{3}\cdot(-6)+b$$
$$-1=-2+b$$
$$-1+2=b$$
$$1=b$$

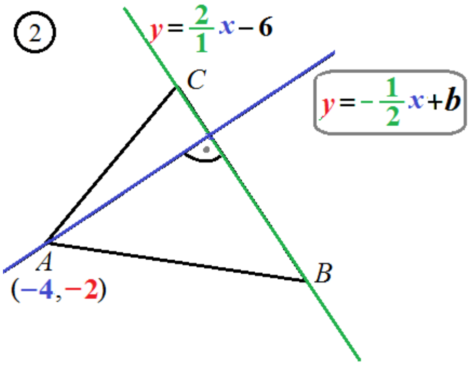
Wyliczone $\boldsymbol{b=1}$ wstawiamy do równania $y=\frac{1}{3}x+b$.

Otrzymujemy $y=\frac{1}{3}x+1$.

Odp. **C**

16.52.
Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).





Równanie prostej *BC*, czyli $y = 2x - 6$, zapisujemy jako $y = \frac{2}{1}x - 6$.

Prosta zawierająca szukaną wysokość jest **prostopadła** do prostej *BC* (rys. 2).
Ze względu na to, odwracamy licznik z mianownikiem we współczynniku *a* i zmieniamy później znak na przeciwny:

$$\frac{2}{1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a_* = -\frac{1}{2}$$

Otrzymujemy $y = -\frac{1}{2}x + b$ (rys. 2).

Do równania $y = -\frac{1}{2}x + b$ podstawiamy $\boldsymbol{x = -4}$, $\boldsymbol{y = -2}$, czyli współrzędne danego punktu *A*, potem wyliczamy *b*.

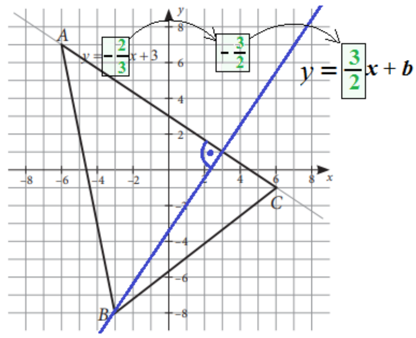
$$-2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + b$$
$$-2 = 2 + b$$
$$-2 - 2 = b$$
$$-4 = b$$

Wyliczone $\boldsymbol{b = -4}$ wstawiamy do równania $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Otrzymujemy $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

Odp. **D**

16.53.



Dana prosta AC $y = -\frac{2}{3}x + 3$ ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{2}{3}$.

Prosta zawierająca szukaną wysokość jest **prostopadła** do prostej AC.
Znajdujemy współczynnik kierunkowy **szukanej prostej**:

$$-\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}.$$

Równanie szukanej prostej to $y = \frac{3}{2}x + b$.

Szukana prosta przechodzi przez punkt $B = (-3, -8)$.

Do równania $y = \frac{3}{2}x + b$ podstawiamy $x = -3$ oraz $y = -8$, wyliczamy ***b***.

$$-8 = \frac{3}{2} \cdot (-3) + b$$

$$-8 = -\frac{9}{2} + b$$

$$-8 = -4{,}5 + b$$

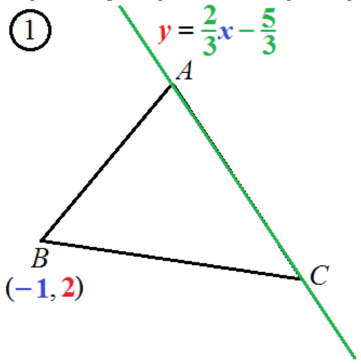
$$-8 + 4{,}5 = b \qquad \rightarrow \qquad -3{,}5 = b$$

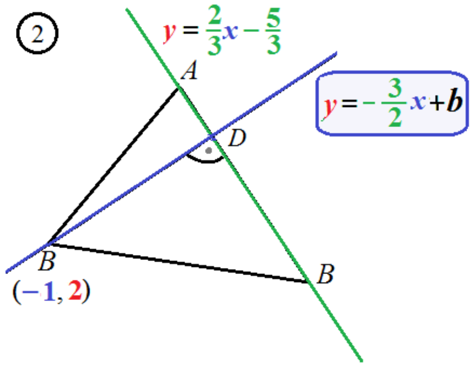
Wstawiamy wyliczone $b = -3{,}5 = -\frac{7}{2}$ do równania $y = \frac{3}{2}x + b$.

Otrzymujemy $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Odp. **B**

16.54.
Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).





Współczynnik kierunkowy prostej AC: $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$, wynosi $a=\frac{2}{3}$.

Szukana prosta BD jest **prostopadła** do prostej AC.

$$\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{2}.$$

Uwzględniamy współczynnik kierunkowy **szukanej prostej** AC, zatem $y=-\frac{3}{2}x+b$.

Ze względu na punkt $B=(-1, 2)$, podstawiamy $\boldsymbol{x=-1}$ oraz $\boldsymbol{y=2}$ do równania $y=-\frac{3}{2}x+b$, wyliczamy $\boldsymbol{b}$.

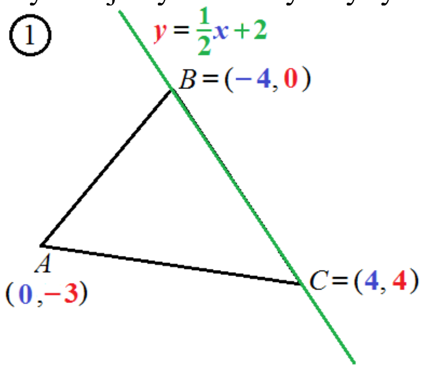
$$y=-\frac{3}{2}x+b$$
$$2=-\frac{3}{2}\cdot(-1)+b$$
$$2=\frac{3}{2}+b$$
$$2=1{,}5+b$$
$$2-1{,}5=b$$
$$0{,}5=b \quad \rightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

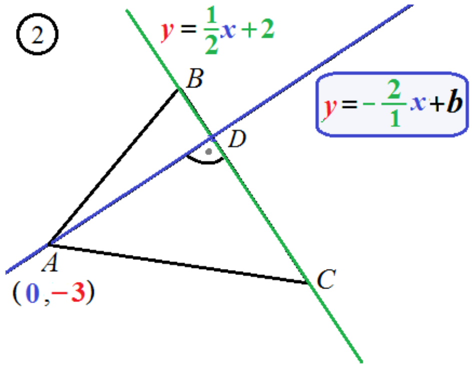
Wstawiamy wyliczone $b=\frac{1}{2}$ do równania $y=-\frac{3}{2}x+b$.

Otrzymujemy $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.

Odp. **A**

16.55.
Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).





Współczynnik kierunkowy prostej *BC*: $y=\frac{1}{2}x+2$, wynosi $a=\frac{1}{2}$.

Szukana prosta *AD* jest **prostopadła** do prostej *AC* (rys. 2).

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow -\frac{2}{1}$ → w ten sposób mamy współczynnik kierunkowy **szukanej prostej *AD***.

$y=-\frac{2}{1}x+b$, czyli $y=-2x+b$ – szukana prosta *AD*.

Do równania $y=-2x+b$ wstawiamy $\boldsymbol{x=0}$ oraz $\boldsymbol{y=-3}$ ze względu na punkt $A=(\mathbf{0}, \mathbf{-3})$ przez który przechodzi prosta *AD*.

$y=-2x+b$
$-3=-2\cdot 0+b$
$-3=0+b$
$-3=b$

Wyliczone $\boldsymbol{b=-3}$ wstawiamy do równania $y=-2x+b$.

Otrzymujemy $y=\mathbf{-2}x-\mathbf{3}$.

Odp. **D**