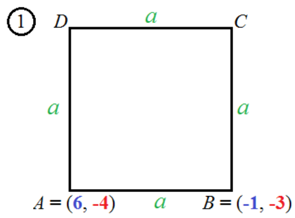
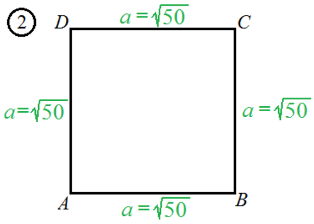
23.1.

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|AB|$.





<u>**Zasada obliczania długości odcinka**</u>:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (\mathbf{6}, \mathbf{-4})$, $B = (\mathbf{-1}, \mathbf{-3})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(6+1)^2 + (\quad)^2}$$

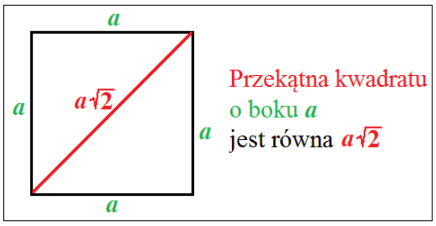
$$|AB| = \sqrt{(6+1)^2 + (-4+3)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AB| = \sqrt{(6+1)^2 + (-4+3)^2} =$

$= \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{\mathbf{50}}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \sqrt{\mathbf{50}}$ (rys. 2).

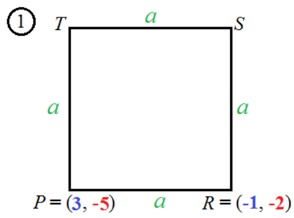
Dla $a = \sqrt{50}$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem $a\sqrt{2} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

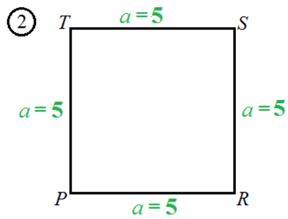


Odp. **D**

23.2.

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|PR|$.





<u>Zasada obliczania długości odcinka</u>:
Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $P = (3, -5)$, $R = (-1, -2)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|PR| = \sqrt{(\quad\quad)^2 + (\quad\quad)^2}$$

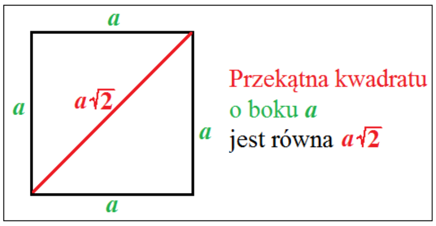
$$|PR| = \sqrt{(3+1)^2 + (\quad\quad)^2}$$

$$|PR| = \sqrt{(3+1)^2 + (-5+2)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|PR| = \sqrt{(3+1)^2 + (-5+2)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$ (rys. 2).

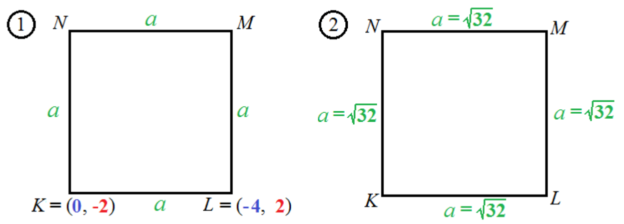


Dla $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem $a\sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} = \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

23.3.

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|KL|$.



Zasada obliczania długości odcinka:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $K = (\mathbf{0}, \mathbf{-2})$, $L = (\mathbf{-4}, \mathbf{2})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|KL| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|KL| = \sqrt{(0+4)^2 + (\quad)^2}$$

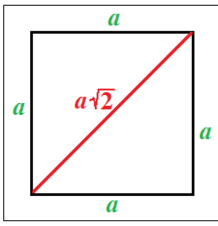
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|KL| = \sqrt{(0+4)^2 + (-2-2)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|KL| = \sqrt{(0+4)^2 + (-2-2)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{\mathbf{32}}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \sqrt{\mathbf{32}}$ (rys. 2).



Przekątna kwadratu o boku $\boldsymbol{a}$ jest równa $\boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{2}}$

Dla $a = \sqrt{32}$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem

$a\sqrt{2} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{64} = \mathbf{8}$.

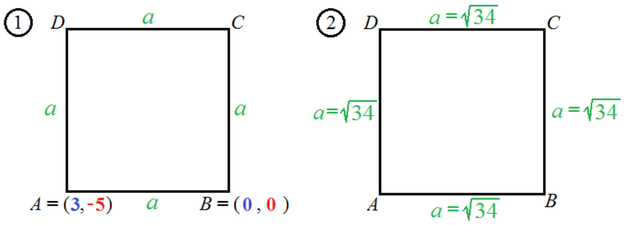
Odp. **B**

23.4.

Rozwiązanie I:

Początek układu współrzędnych to punkt $B = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|AB|$.



<u>Zasada obliczania długości odcinka</u>:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (\mathbf{3}, \mathbf{-5})$, $B = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-5-0)^2}$$

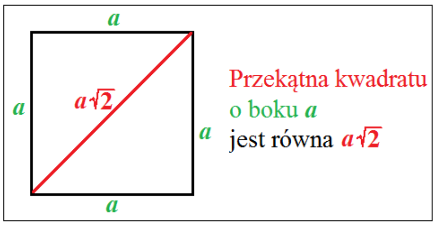
d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-5-0)^2} =$

$= \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{\mathbf{34}}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \sqrt{34}$ (rys. 2).

Dla $a = \sqrt{34}$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem

$a\sqrt{2} = \sqrt{34} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = \mathbf{2\sqrt{17}}$.



Odp. **A**

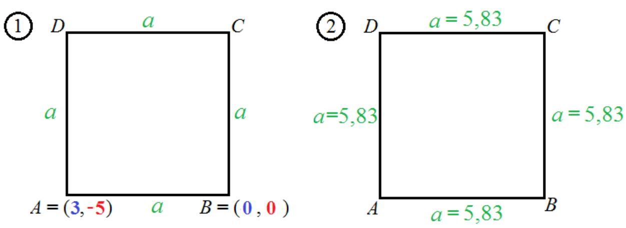
Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy przybliżeń pierwiastków:

$|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-5-0)^2} =$

$= \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx \mathbf{5{,}83}$

(rys. 2).



Dla $a = 5{,}83$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem $a\sqrt{2} \approx 5{,}83 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}83 \cdot 1{,}41 \approx$ **8,22**.

Używając przybliżeń $\sqrt{17} \approx \mathbf{4{,}12}$ oraz $\sqrt{34} \approx \mathbf{5{,}83}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **8,22**.

A. $2\sqrt{17} \approx 2 \cdot 4{,}12 = \mathbf{8{,}24}$

B. $2\sqrt{34} \approx 2 \cdot 5{,}83 = 11{,}66$

C. $4\sqrt{17} \approx 4 \cdot 4{,}12 = 16{,}48$

D. $4\sqrt{34} \approx 4 \cdot 5{,}83 = 23{,}32$

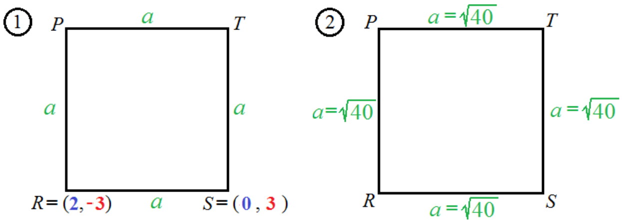
Wyraźnie widać, że wynik **8,24** jest **najbliżej** rezultatu **8,22**.

Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

23.5.

Rozwiązanie I:

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|RS|$.



Zasada obliczania długości odcinka:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $R = (2, -3)$, $S = (0, 3)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|RS| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (\qquad)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-3 - 3)^2}$$

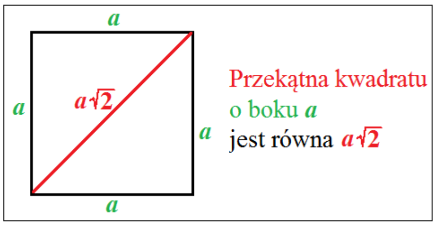
d) obliczamy wartość wyrażenia: $|RS| = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-3)^2} =$

$= \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{\mathbf{40}}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \sqrt{40}$ (rys. 2).

Dla $a = \sqrt{40}$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem

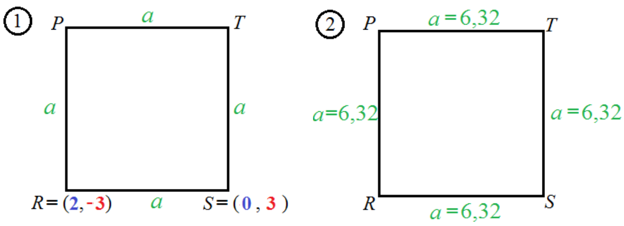
$a\sqrt{2} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \mathbf{4\sqrt{5}}$.



Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy przybliżeń pierwiastków:



$|RS| = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-3)^2} =$

$= \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \approx \mathbf{6{,}32}$

(rys. 2).

Dla $a = 6{,}32$ obliczamy przekątną kwadratu, zatem $a\sqrt{2} \approx 6{,}32 \cdot \sqrt{2} \approx 6{,}32 \cdot 1{,}41 \approx$ **8,91**.

Używając przybliżeń $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$ oraz $\sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **8,91**.

A. $2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$

B. 8

C. $4\sqrt{5} \approx 4 \cdot 2{,}24 = \mathbf{8{,}96}$

D. 40

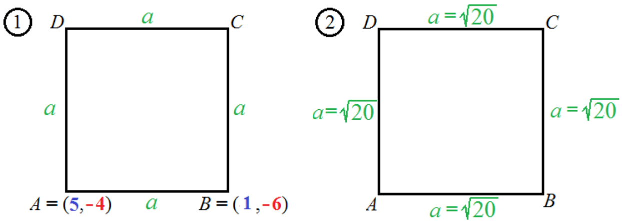
Wyraźnie widać, że wynik **8,96** jest **najbliżej** rezultatu **8,91**.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

23.6.

Rozwiązanie I:

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka $|AB|$.



<u>Zasada obliczania długości odcinka</u>:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (\mathbf{5}, \mathbf{-4})$, $B = (\mathbf{1}, \mathbf{-6})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (-4+6)^2}$$

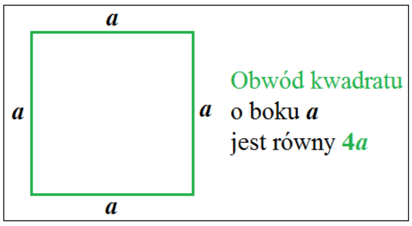
d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (-4+6)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{\mathbf{20}}$.

Bok kwadratu ma długość $a = \sqrt{20}$ (rys. 2).

Dla $a = \sqrt{20}$ obliczamy obwód kwadratu, zatem

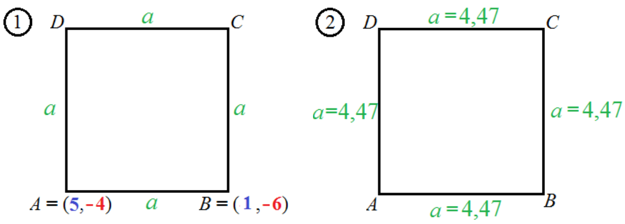
$4a = 4 \cdot \sqrt{20} = \underbrace{\sqrt{16}}_{4} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{16 \cdot 20} = \sqrt{\mathbf{320}}$.



Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy **przybliżeń pierwiastków**:



$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx \mathbf{4{,}47}$ (rys. 2).

Dla $a = 4{,}47$ obliczamy obwód kwadratu, zatem $\mathbf{4a} = 4 \cdot 4{,}47 = \mathbf{17{,}88}$.

Używając przybliżeń $\sqrt{80} \approx \mathbf{8{,}94}$, $\sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$ oraz $\sqrt{320} \approx \mathbf{17{,}89}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **17,88**.

A. $\sqrt{80} \approx 8{,}94$

B. $4 + 2\sqrt{5} \approx 4 + 2 \cdot 2{,}24 = 4 + 4{,}48 = 8{,}48$

C. $6\sqrt{5} \approx 6 \cdot 2{,}24 = 13{,}44$

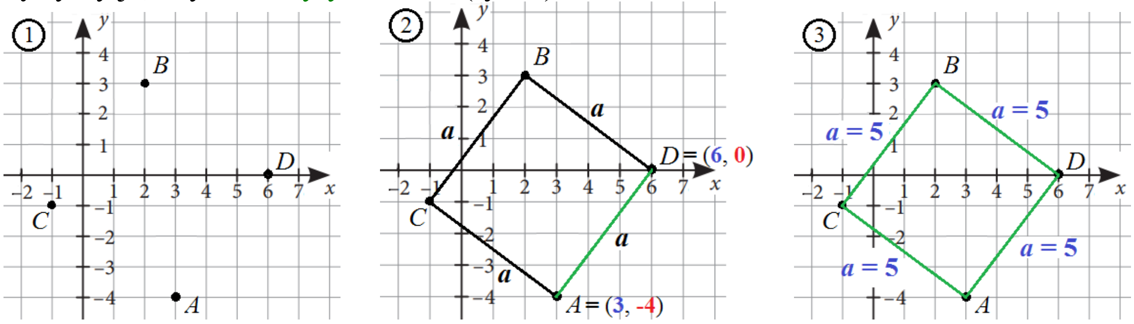
D. $\sqrt{320} \approx \mathbf{17{,}89}$.

Wyraźnie widać, że wynik **17,89** jest **najbliżej** rezultatu **17,88**.

Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

23.7.

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1). Następnie łączymy je, aby utworzyły kwadrat (rys. 2).



Obliczamy długość boku kwadratu $\boldsymbol{a}$. W tym celu – patrząc się na rys. 2 – wybieramy parę **sąsiednich wierzchołków** kwadratu (np. punkty A i D) i liczymy długość $|AD|$.

<u>Zasada obliczania długości odcinka</u>:

$A = (\mathbf{3}, \mathbf{-4})$, $D = (\mathbf{6}, \mathbf{0})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|AD| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AD| = \sqrt{(3-6)^2 + (\qquad)^2}$$

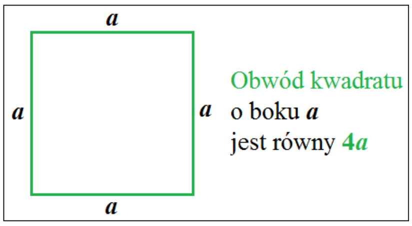
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AD| = \sqrt{(3-6)^2 + (-4-0)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AD| = \sqrt{(3-6)^2 + (-4-0)^2} =$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$.

Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$ (rys. 2).



Dla $a = 5$ obliczamy obwód kwadratu, zatem

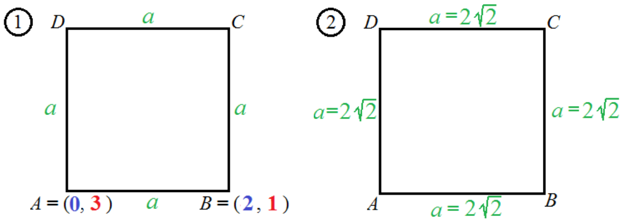
$4a = 4 \cdot 5 = \mathbf{20}$.

Odp. **C**

23.8.

Rozwiązanie I:

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka o końcach w danych punktach $A = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$ i $B = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$.



<u>**Zasada obliczania długości odcinka**</u>:

$A = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$, $B = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$|AB| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$|AB| = \sqrt{(\mathbf{0} - \mathbf{2})^2 + (\qquad)^2}$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$|AB| = \sqrt{(\mathbf{0} - \mathbf{2})^2 + (\mathbf{3} - \mathbf{1})^2}$

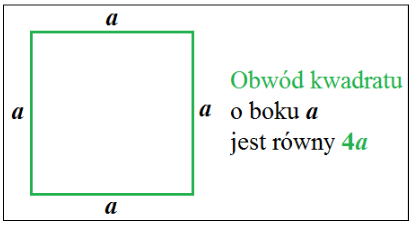
d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AB| = \sqrt{(0-2)^2 + (3-1)^2} =$

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.

Bok kwadratu ma długość $a = 2\sqrt{2}$ (rys. 2).

Dla $a = 2\sqrt{2}$ obliczamy obwód kwadratu, zatem

$4a = 4 \cdot \underbrace{2\sqrt{2}}_{a} = \mathbf{8\sqrt{2}}$.



Odp. **B**

Rozwiązanie II:

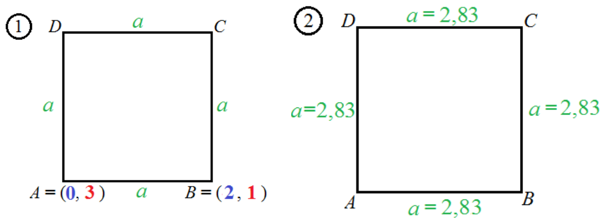
Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy **przybliżeń pierwiastków**:

$|AB| = \sqrt{(0-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \approx \mathbf{2{,}83}$ (rys. 2).

Dla $a = 2{,}83$ obliczamy obwód kwadratu,

zatem $\mathbf{4a} = 4 \cdot 2{,}83 = \mathbf{11{,}32}$.



Używając przybliżeń $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$ oraz $\sqrt{8} \approx \mathbf{2{,}83}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **11,32**.

A. $4\sqrt{2} \approx 4 \cdot 1{,}41 = 5{,}64$

B. $8\sqrt{2} \approx 8 \cdot 1{,}41 = \mathbf{11{,}28}$

C. $6\sqrt{2} \approx 6 \cdot 1{,}41 = 8{,}46$

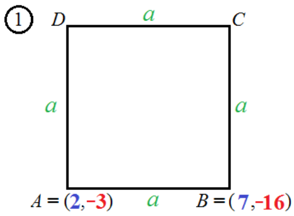
D. $8\sqrt{8} \approx 8 \cdot 2{,}83 = 22{,}64$

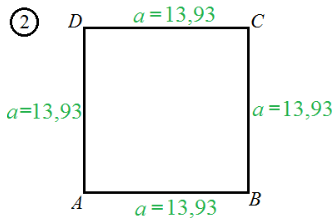
Wyraźnie widać, że wynik **11,28** z odpowiedzi **B** jest **najbliżej** rezultatu **11,32**.

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

23.9.

Obliczamy długość boku kwadratu, czyli długość odcinka o końcach w danych punktach $A = (\mathbf{2}, \mathbf{-3})$ i $B = (\mathbf{7}, \mathbf{-16})$.





<u>**Zasada obliczania długości odcinka**</u>:
$A = (\mathbf{2}, \mathbf{-3})$, $B = (\mathbf{7}, \mathbf{-16})$.
a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,
b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

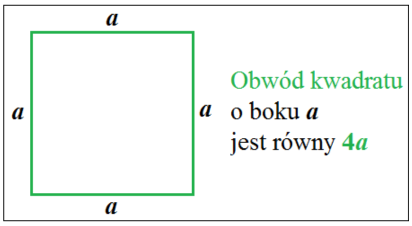
$$|AB| = \sqrt{(\quad\quad)^2 + (\quad\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(2 - 7)^2 + (\quad\quad)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(2 - 7)^2 + (-3+16)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AB| = \sqrt{(2-7)^2 + (-3+16)^2} =$

$= \sqrt{(-5)^2 + 13^2} = \sqrt{25+169} = \sqrt{194} \approx \mathbf{13{,}93}$.
Bok kwadratu ma długość $\boldsymbol{a} \approx \mathbf{13{,}93}$ (rys. 2).



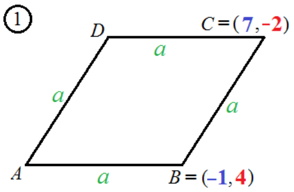
Dla $a = 13{,}93$ obliczamy obwód kwadratu, zatem
$4a = 4 \cdot \underbrace{13{,}93}_{a} = \mathbf{55{,}72}$.

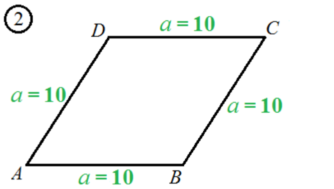
Obwód kwadratu wynosi **55,72**, więc jest **większy od 52**.

Odp. **D**

23.10.

Obliczamy długość boku rombu, czyli długość odcinka o końcach w danych punktach $B = (-1, 4)$ i $C = (7, -2)$.





Zasada obliczania długości odcinka:

$B = (-1, 4)$, $C = (7, -2)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|BC| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

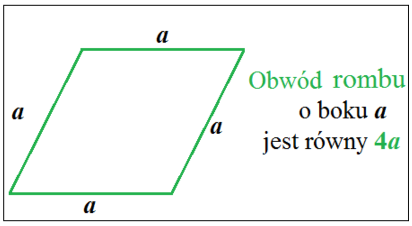
$$|BC| = \sqrt{(-1-7)^2 + (\qquad)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{(-1-7)^2 + (4+2)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|BC| = \sqrt{(-1-7)^2 + (4+2)^2} =$

$= \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

Bok rombu ma długość $\boldsymbol{a} = \mathbf{10}$ (rys. 2).



Dla $a = 10$ obliczamy obwód rombu,

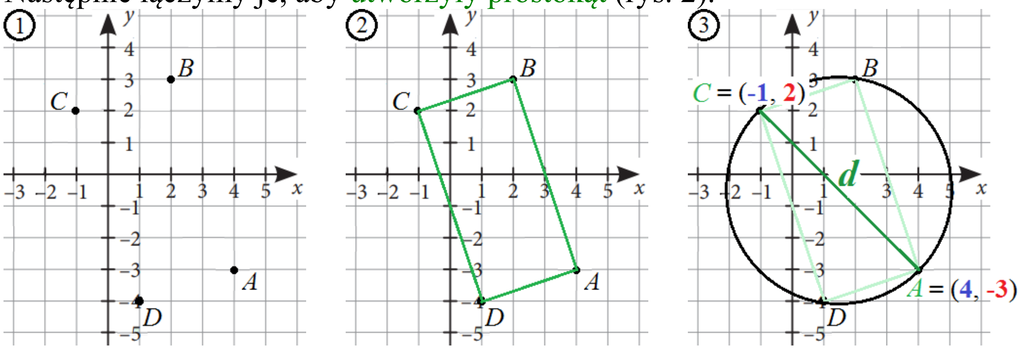
zatem $4a = 4 \cdot 10 = \mathbf{40}$.

Odp. **D**

23.11.

Rozwiązanie I:

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).
Następnie łączymy je, aby utworzyły prostokąt (rys. 2).



Na prostokącie **opisujemy koło** (rys. 3).
Średnica tego koła jest równa odległości pomiędzy **przeciwległymi** wierzchołkami prostokąta, więc np. $\boldsymbol{d} = |AC|$. Obliczamy długość $|AC|$.

Zasada obliczania długości odcinka:

$A = (\mathbf{4}, \mathbf{-3})$, $C = (\mathbf{-1}, \mathbf{2})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

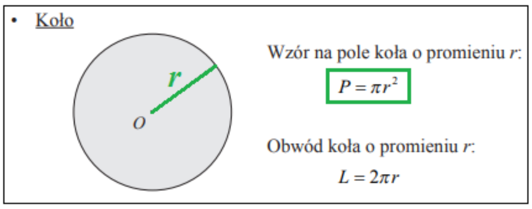
$$|AC| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(\,4+1\,)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{(\,4+1\,)^2 + (-3-2\,)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|AC| = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-2)^2} =$

$= \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{\mathbf{50}}$.



Oznacza to, że średnica koła ma długość $\sqrt{\mathbf{50}}$,

więc promień koła wynosi $\boldsymbol{r} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{50}}}{\mathbf{2}}$.

Dla $r = \dfrac{\sqrt{50}}{2}$ obliczamy pole koła ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$ (**karta wzorów**, str. 10). Zatem:

$$P = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{50}{4} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{2}}\pi.$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy **przybliżeń pierwiastków** oraz liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$. Zatem $|AC| = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \approx \mathbf{7{,}07}$.

Średnica koła wynosi **7,07**, więc **promień** $\boldsymbol{r} = 7{,}07 : 2 = \mathbf{3{,}535}$.

Dla $\boldsymbol{r} = \mathbf{3{,}535}$ oraz $\pi = \mathbf{3{,}14}$ liczymy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem:

$P \approx 3{,}14 \cdot (3{,}535)^2 \approx 3{,}14 \cdot 12{,}496 \approx \mathbf{39{,}24}$.

Używając przybliżenia liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **39,24**.

A. $50\pi \approx 50 \cdot 3{,}14 = 157$

B. $25\pi \approx 25 \cdot 3{,}14 = 78{,}5$

C. $\frac{25}{2}\pi \approx 12{,}5 \cdot 3{,}14 = \mathbf{39{,}25}$

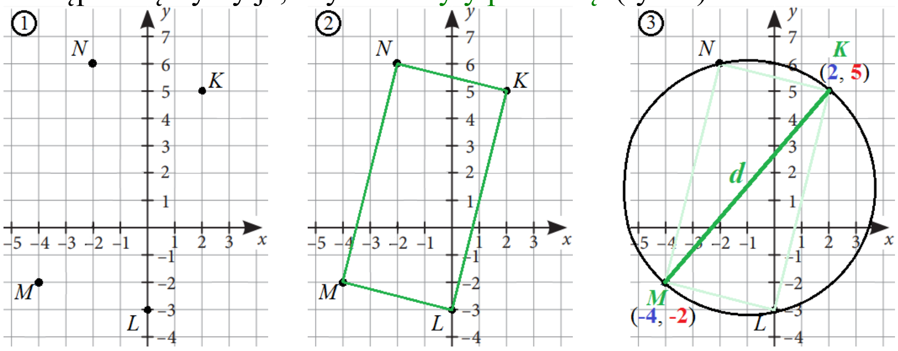
D. $10\pi \approx 10 \cdot 3{,}14 = 31{,}4$

Wyraźnie widać, że wynik **39,25** z odpowiedzi **C** jest **najbliżej** rezultatu **39,24**.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

23.12.

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).
Następnie łączymy je, aby utworzyły prostokąt (rys. 2).



Z treści zadania wynika, że **prostokąt** ma być **wpisany** w okrąg. Oznacza to, że **okrąg** musi być **na zewnątrz** prostokąta (rys. 3).
Średnica tego koła jest równa odległości pomiędzy **przeciwległymi** wierzchołkami prostokąta, więc np. $d = |MK|$. Obliczamy długość $|MK|$.

Zasada obliczania długości odcinka:
$M = (-4, -2)$, $K = (2, 5)$.
a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,
b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne x obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne y obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|MK| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|MK| = \sqrt{(-4-2)^2 + (\quad)^2}$$

$$|MK| = \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-5)^2}$$

$$|MK| = \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{\mathbf{85}}.$$

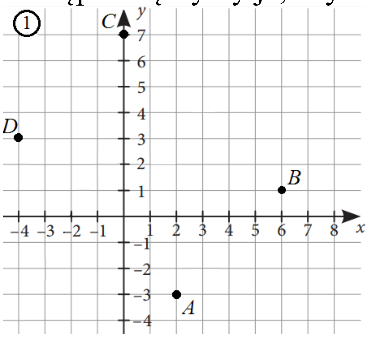
Oznacza to, że średnica koła ma długość $\sqrt{\mathbf{85}}$, tym samym promień koła wynosi $r = \frac{\sqrt{\mathbf{85}}}{\mathbf{2}}$.

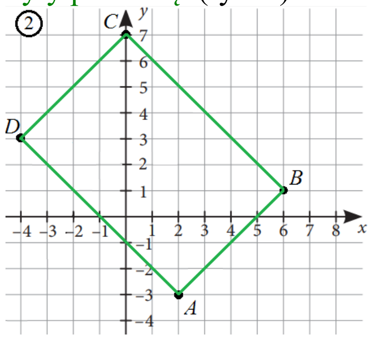
Odp. **D**

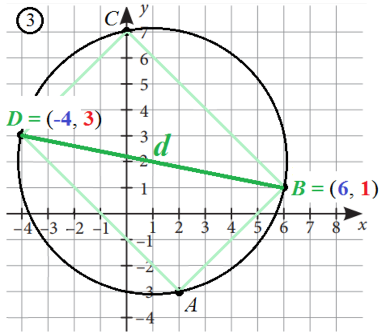
23.13.

Rozwiązanie I:

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).
Następnie łączymy je, aby utworzyły prostokąt (rys. 2).







Na prostokącie **opisujemy koło** (rys. 3).
Średnica tego koła jest równa odległości pomiędzy **przeciwległymi** wierzchołkami prostokąta, więc np. $\boldsymbol{d} = |DB|$. Obliczamy długość $|DB|$.

Zasada obliczania długości odcinka:

$D = (-4, 3)$, $B = (6, 1)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|DB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|DB| = \sqrt{(-4-6)^2 + (\quad)^2}$$

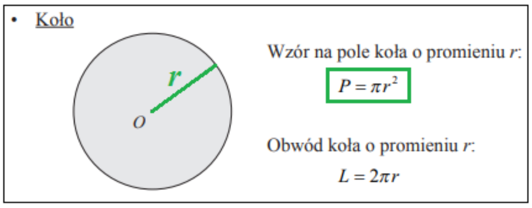
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|DB| = \sqrt{(-4-6)^2 + (3-1)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|DB| = \sqrt{(-4-6)^2 + (3-1)^2} =$

$= \sqrt{(-10)^2 + 2^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} =$

$= \sqrt{4 \cdot 26} = \mathbf{2\sqrt{26}}$



Oznacza to, że średnica koła ma długość $\mathbf{2\sqrt{26}}$,

więc promień koła wynosi $\boldsymbol{r} = \dfrac{2\sqrt{26}}{2} = \mathbf{\sqrt{26}}$.

Dla $r = \sqrt{26}$ obliczamy pole koła ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$ (**karta wzorów**, str. 10). Zatem:

$P = \pi \cdot \left(\sqrt{26}\right)^2 = \mathbf{26\pi}$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy **przybliżeń pierwiastków** oraz liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$.

Zatem $|DB| = \sqrt{(-4-6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 2^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \approx \mathbf{10{,}198}$.

Średnica koła wynosi ok. **10,198**, więc **promień** $\boldsymbol{r} = 10{,}198 : 2 = 5{,}099 \approx \mathbf{5{,}1}$.

Dla $\boldsymbol{r} = \mathbf{5{,}1}$ oraz $\pi = \mathbf{3{,}14}$ liczymy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem:

$P \approx 3{,}14 \cdot (5{,}1)^2 = 3{,}14 \cdot 26{,}01 \approx \mathbf{81{,}67}$.

Używając przybliżenia liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **81,67**.

A. $26\pi \approx 26 \cdot 3{,}14 = \mathbf{81{,}64}$ B. $8\pi \approx 8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12$

C. $52\pi \approx 52 \cdot 3{,}14 = 163{,}28$

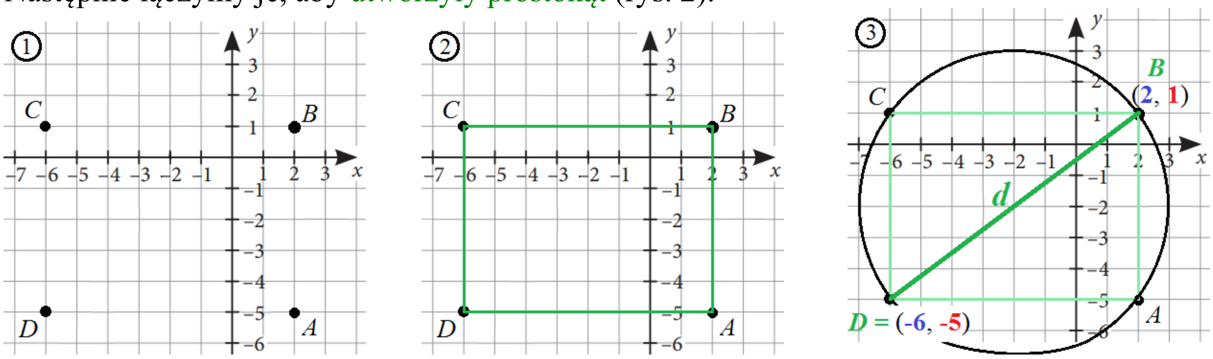
D. $64\pi \approx 64 \cdot 3{,}14 = 200{,}96$

Wyraźnie widać, że wynik **81,64** z odpowiedzi **A** jest **najbliżej** rezultatu **81,67**.

Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

23.14.

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).
Następnie łączymy je, aby utworzyły prostokąt (rys. 2).



Na prostokącie opisano w okrąg.
Oznacza to, że **okrąg** musi być **na zewnątrz** prostokąta (rys. 3).
Średnica tego koła jest równa odległości pomiędzy **przeciwległymi** wierzchołkami prostokąta, więc np. $\boldsymbol{d} = |DB|$.   Obliczamy długość $|DB|$.

Zasada obliczania długości odcinka:
$D = (-6, -5)$, $B = (2, 1)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,
b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|DB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|DB| = \sqrt{(-6-2)^2 + (\quad)^2}$$

$$|DB| = \sqrt{(-6-2)^2 + (-5-1)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|DB| = \sqrt{(-6-2)^2 + (-5-1)^2} =$

$= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

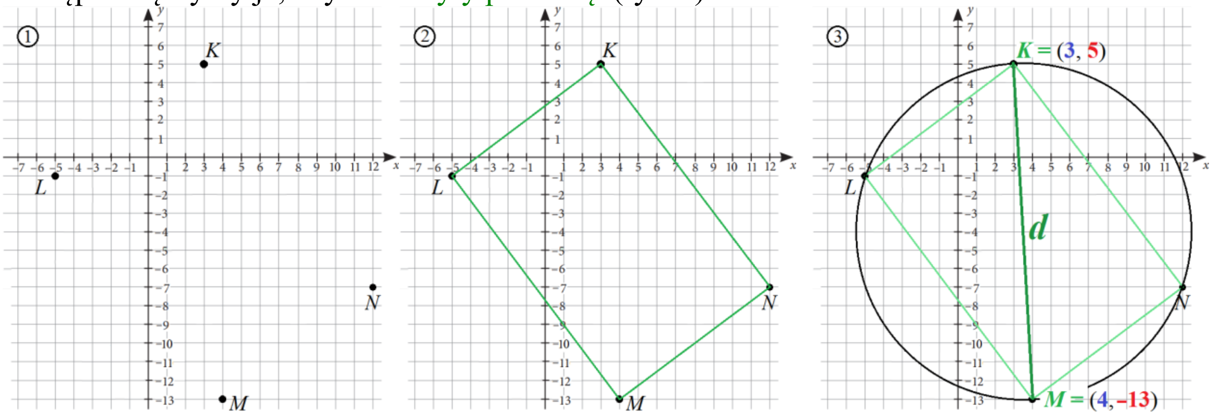
Oznacza to, że średnica koła ma długość $\boldsymbol{d} = \mathbf{10}$, tym samym promień koła ma długość $\boldsymbol{r} = \mathbf{5}$.

Odp. **C**

23.15.

Rozwiązanie I:

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).
Następnie łączymy je, aby utworzyły prostokąt (rys. 2).



Na prostokącie **opisujemy koło** (rys. 3).
Średnica tego koła jest równa odległości pomiędzy **przeciwległymi** wierzchołkami prostokąta, więc np. $d = |MK|$. Obliczamy długość $|MK|$.

Zasada obliczania długości odcinka:

$M = (4, -13)$, $K = (3, 5)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne x obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne y obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|MK| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|MK| = \sqrt{(4-3)^2 + (\quad)^2}$$

$$|MK| = \sqrt{(4-3)^2 + (-13-5)^2}$$

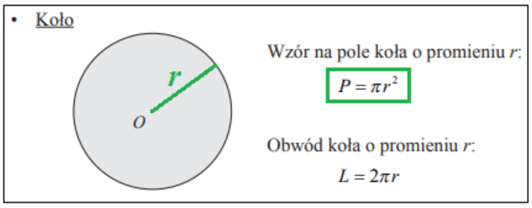
$$|MK| = \sqrt{(4-3)^2 + (-13-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-18)^2} = \sqrt{1+324} = \mathbf{\sqrt{325}}.$$

Oznacza to, że średnica koła ma długość $d = \sqrt{325}$, tym samym promień koła ma długość

$$r = \frac{\sqrt{325}}{2}.$$

Dla $r = \frac{\sqrt{325}}{2}$ obliczamy pole koła ze wzoru

$P = \pi \cdot r^2$ (**karta wzorów**, str. 10).



Zatem $P = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{325}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{325}{4} = \mathbf{\frac{325}{4}}\pi$.

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy tak samo jak w Rozwiązaniu I, tylko używamy **przybliżeń pierwiastków** oraz liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$.

Zatem $|MK| = \sqrt{(4-3)^2 + (-13-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-18)^2} = \sqrt{1+324} = \sqrt{325} \approx$ **18,03**.

Średnica koła wynosi ok. **18,03**, więc **promień** $r = 18{,}03 : 2 =$ **9,015**.

$P = \pi \cdot r^2$ → liczymy pole koła dla $\pi = 3{,}14$ oraz $r = 9{,}015$

$P \approx 3{,}14 \cdot (9{,}015)^2 \approx 3{,}14 \cdot 81{,}27 \approx$ **255,19**.

Używając przybliżenia liczby $\pi \approx \mathbf{3{,}14}$ oceniamy, który z wyników przedstawionych w odpowiedziach jest najbliżej rezultatu **255,19**.

A. $\frac{65}{4}\pi \approx 16{,}25 \cdot 3{,}14 = 51{,}025$

B. $\frac{65}{2}\pi \approx 32{,}5 \cdot 3{,}14 = 102{,}05$

C. $\frac{325}{4}\pi \approx 81{,}25 \cdot 3{,}14 = \mathbf{255{,}125}$

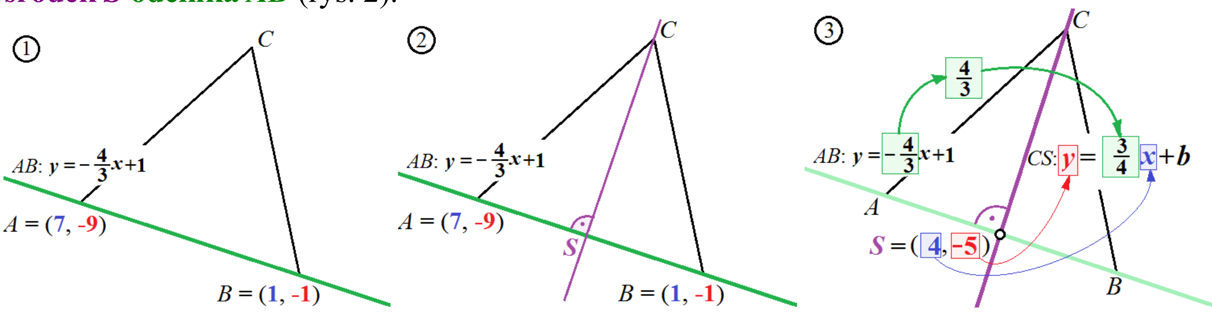
D. $\frac{325}{2}\pi \approx 162{,}5 \cdot 3{,}14 = 510{,}25$

Wyraźnie widać, że wynik **255,125** z odpowiedzi **C** jest **najbliżej** rezultatu **255,19**.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

23.16.

Wykonujemy schematyczny rysunek sytuacji z zadania, uwzględniając dane (rys. 1).
Prosta, której równanie trzeba znaleźć, jest **prostopadła** do prostej AB i ma przechodzić przez **środek S odcinka AB** (rys. 2).

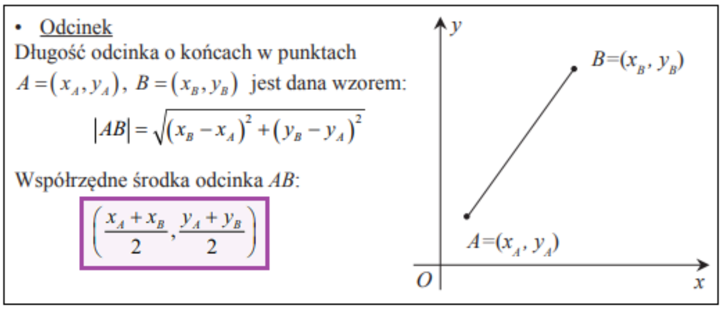


Wyznaczamy współrzędne punktu S – **środka odcinka** AB, gdzie $A = (7, -9)$, $B = (1, -1)$.
Wykorzystujemy **kartę wzorów**, str. 4.

$$S = \left(\frac{7+1}{2}, \frac{-9+(-1)}{2}\right)$$

$$S = \left(\frac{8}{2}, \frac{-10}{2}\right)$$

$$S = (4, -5)$$



Prosta CS ma współczynnik kierunkowy **przeciwny** i **odwrotny** do $-\frac{4}{3}$ czyli współczynnika kierunkowego prostej AB (rys. 3), zatem: $-\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \mathbf{\frac{3}{4}}$.

Szukana prosta CS ma równanie $y = \frac{3}{4}x + b$ (rys. 3). Odrzucamy odpowiedzi C i D.

$y = \frac{3}{4}x + b$ podstawiamy $x = 4$ oraz $y = -5$, czyli współrzędne $S = (4, -5)$.
w ten sposób wyliczymy współczynnik b

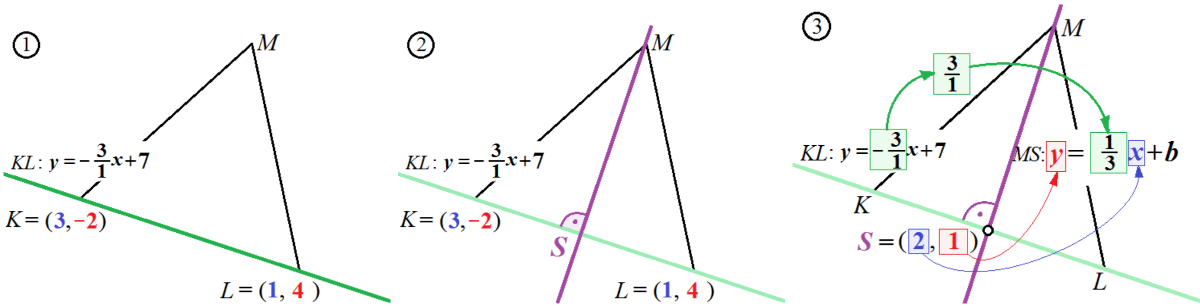
$-5 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b$ 4 się skraca

$-5 = 3 + b$
$-5 - 3 = b$
$-8 = b$

Do równania $y = \frac{3}{4}x + b$ podstawiamy wyliczone $b = -8$. Otrzymujemy $y = \frac{3}{4}x - 8$.

Odp. **B**

23.17.
Wykonujemy schematyczny rysunek sytuacji z zadania, uwzględniając dane (rys. 1).
Prosta, której równanie trzeba znaleźć, jest **prostopadła** do prostej AB i ma przechodzić przez **środek S odcinka AB** (rys. 2). Równanie prostej AB: $y = -3x + 7$ widzimy jako $y = -\frac{3}{1}x + 7$.

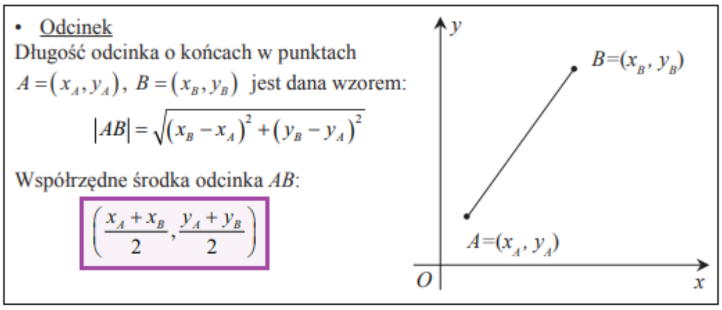


Wyznaczamy współrzędne punktu S – **środka odcinka KL**, gdzie $K = (3, -2)$, $L = (1, 4)$.
Wykorzystujemy **kartę wzorów**, str. 4.

$$S = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$$

$$S = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

$$S = (2, 1)$$


- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\boxed{\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Prosta MS ma współczynnik kierunkowy **przeciwny** i **odwrotny** do $-\frac{3}{1}$ czyli współczynnika kierunkowego prostej KL (rys. 3), zatem: $-\frac{3}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{1}{3}$.

Szukana prosta MS ma równanie $y = \frac{1}{3}x + b$ (rys. 3).

$y = \frac{1}{3}x + b$ podstawiamy $x = 2$ oraz $y = 1$, czyli współrzędne $S = (2, 1)$.

w ten sposób wyliczymy współczynnik b

$$1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b$$

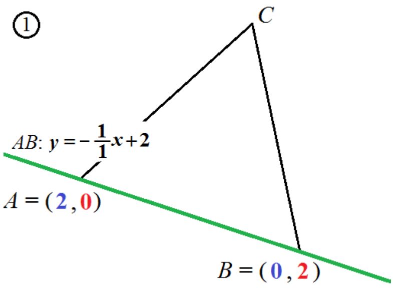
$$1 = \frac{2}{3} + b$$

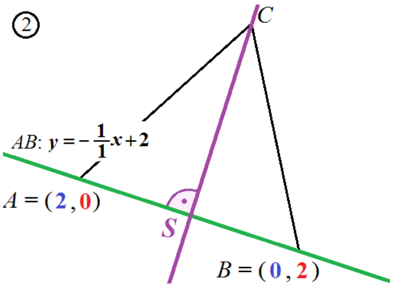
$$1 - \frac{2}{3} = b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} = b$$

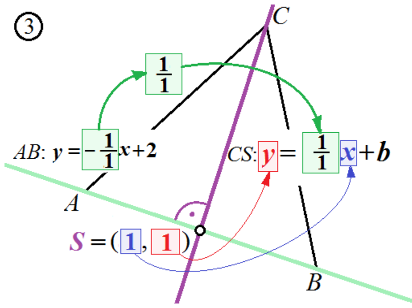
Do równania $y = \frac{1}{3}x + b$ podstawiamy wyliczone $b = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Odp. **B**

23.18.
Wykonujemy schematyczny rysunek sytuacji z zadania, uwzględniając dane (rys. 1).
Prosta, której równanie trzeba znaleźć, jest **prostopadła** do prostej AB i ma przechodzić przez **środek *S* odcinka *AB*** (rys. 2).







Wyznaczamy współrzędne punktu S – **środka odcinka *AB***, gdzie $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$.
Wykorzystujemy **kartę wzorów**, str. 4.

$$S=\left(\frac{2+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$$

$$S=\left(\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right)$$

$$S=(1,1)$$

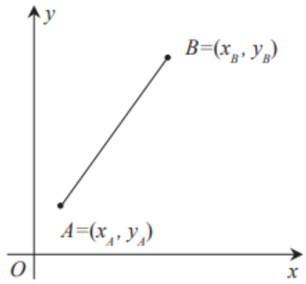
- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\boxed{\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$



Prosta CS ma współczynnik kierunkowy **przeciwny** i **odwrotny** do $-\frac{1}{1}$ czyli współczynnika kierunkowego prostej AB (rys. 3), zatem: $-\frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$.

Szukana prosta CS ma równanie $y=\frac{1}{1}x+b$ (rys. 3).

$y=\frac{1}{1}x+b$ podstawiamy $x = 1$ oraz $y = 1$, czyli współrzędne $S = (1, 1)$.

w ten sposób wyliczymy współczynnik b

$1=\frac{1}{1}\cdot 1+b$ 4 się skraca

$1 = 1 + b$

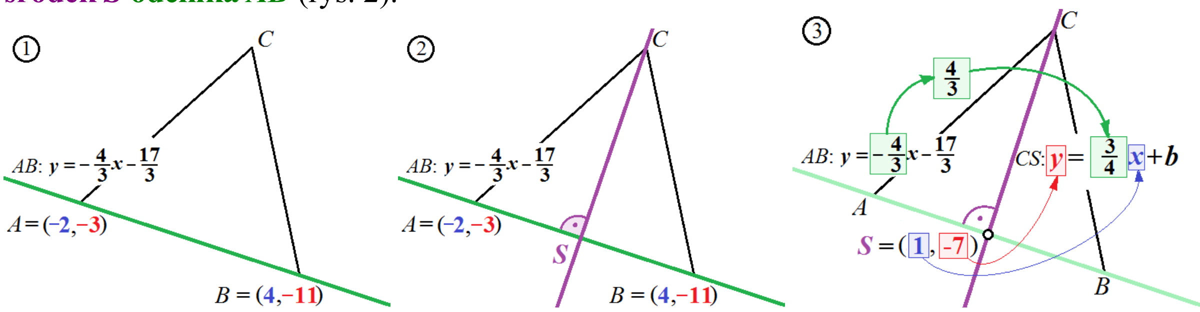
$0 = b$

Do równania $y=\frac{1}{1}x+b$ podstawiamy wyliczone $b = 0$. Dostajemy $y=\frac{1}{1}x+0$, czyli $y = x$.

Odp. **D**

23.19.

Wykonujemy schematyczny rysunek sytuacji z zadania, uwzględniając dane (rys. 1).
Prosta, której równanie trzeba znaleźć, jest **prostopadła** do prostej AB i ma przechodzić przez **środek S odcinka AB** (rys. 2).



Wyznaczamy współrzędne punktu S – **środka odcinka AB**, gdzie $A = (-2, -3)$, $B = (4, -11)$.
Wykorzystujemy **kartę wzorów**, str. 4.

$$S=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-3+(-11)}{2}\right)$$

$$S=\left(\frac{2}{2},\frac{-14}{2}\right)$$

$S = (1, -7)$

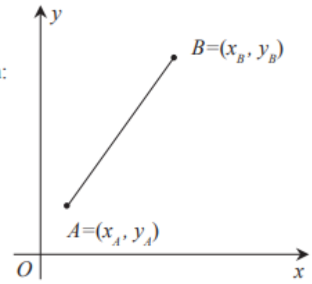
- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\boxed{\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$



Prosta CS ma współczynnik kierunkowy **przeciwny** i **odwrotny** do $-\frac{4}{3}$ czyli współczynnika kierunkowego prostej AB (rys. 3), zatem: $-\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{3}{4}$.

Szukana prosta CS ma równanie $y=\frac{3}{4}x+b$ (rys. 3).

$y=\frac{3}{4}x+b$ — podstawiamy $x = 1$ oraz $y = -7$, czyli współrzędne $S = (1, -7)$.

w ten sposób wyliczymy współczynnik b

$-7=\frac{3}{4}\cdot 1+b$ — 4 się skraca

$-7 = 0{,}75 + b$

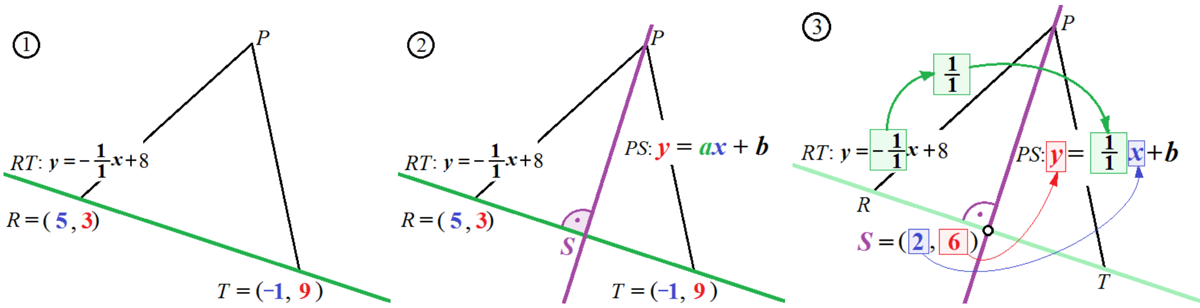
$-7 - 0{,}75 = b$

$-7{,}75 = b$

Do równania $y=\frac{3}{4}x+b$ podstawiamy $b = -7{,}75$, więc $y=\frac{3}{4}x-7{,}75$, czyli $y=\frac{3}{4}x-7\frac{3}{4}$.

Odp. **D**

23.20.
Wykonujemy schematyczny rysunek sytuacji z zadania, uwzględniając dane (rys. 1).
Prosta, której równanie trzeba znaleźć, jest **prostopadła** do prostej RT i ma przechodzić przez **środek S odcinka RT** (rys. 2). Równanie $y = -x + 8$ traktujemy jako $y = -\frac{1}{1}x + 8$.

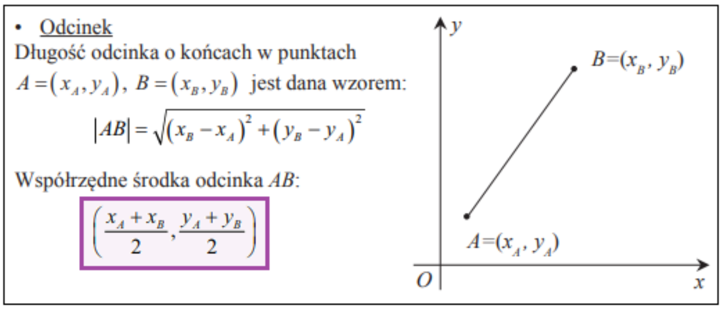


Wyznaczamy współrzędne punktu S – **środka odcinka RT**, gdzie $R = (5, 3)$, $T = (-1, 9)$.
Wykorzystujemy **kartę wzorów**, str. 4.

$$S = \left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{3 + 9}{2}\right)$$

$$S = \left(\frac{4}{2}, \frac{12}{2}\right)$$

$$S = (2, 6)$$



Prosta PS ma współczynnik kierunkowy **przeciwny** i **odwrotny** do $-\frac{1}{1}$ czyli współczynnika kierunkowego prostej RT (rys. 3), zatem: $-\frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$.

Szukana prosta PS ma równanie $y = \frac{1}{1}x + b$ (rys. 3). Zatem $a = 1$. Odrzucamy odp. A i B.

$y = \frac{1}{1}x + b$ — podstawiamy $x = 2$ oraz $y = 6$, czyli współrzędne $S = (2, 6)$.

w ten sposób wyliczymy współczynnik b

$6 = \frac{1}{1} \cdot 2 + b$
$6 = 2 + b$
$6 - 2 = b$

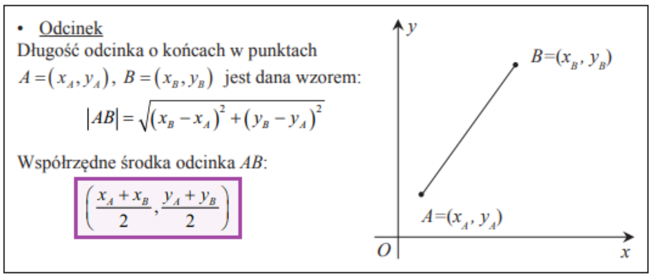
$4 = b$
Zatem prawdziwe są warunki $a = 1$, $b = 4$.

Odp. **C**

23.21.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).


• Odcinek
Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ jest dana wzorem:
$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
Współrzędne środka odcinka AB:
$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10\sqrt{5}+\left(-2\sqrt{45}\right)}{2},\frac{-3\sqrt{12}+\left(-6\sqrt{3}\right)}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10\sqrt{5}-2\sqrt{45}}{2},\frac{-3\sqrt{12}-6\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{9\cdot5}}{2},\frac{-3\cdot\sqrt{4\cdot3}-6\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10\sqrt{5}-2\cdot\mathbf{3\sqrt{5}}}{2},\frac{-3\cdot\mathbf{2\sqrt{3}}-6\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{10\sqrt{5}-6\sqrt{5}}{2},\frac{-6\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{2}\right)\ \to\ \left(\frac{4\sqrt{5}}{2},\frac{-12\sqrt{3}}{2}\right)\ \to\ \left(\mathbf{2\sqrt{5},-6\sqrt{3}}\right).$$

Odp. **C**

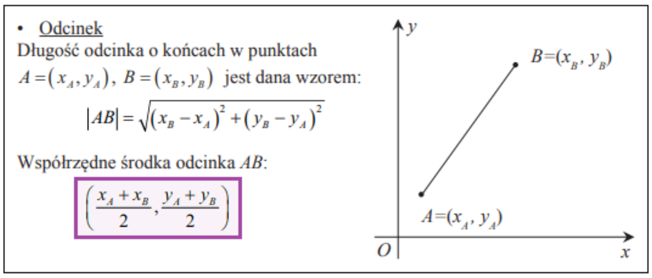
Rozwiązanie II:

Korzystamy z przybliżeń pierwiastków $\sqrt{5}\approx\mathbf{2{,}24}$, $\sqrt{12}\approx\mathbf{3{,}46}$, $\sqrt{45}\approx\mathbf{6{,}71}$, $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$.

Zatem: $P=\left(10\cdot\mathbf{2{,}24},-3\cdot\mathbf{3{,}46}\right)$, więc ***P*** **= (22,4 ; –10,38)**

oraz $R=\left(-2\cdot\mathbf{6{,}71},-6\cdot\mathbf{1{,}73}\right)$, więc ***R*** **= (–13,42 ; –10,38)**

Następnie korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).


• Odcinek
Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ jest dana wzorem:
$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
Współrzędne środka odcinka AB:
$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$$\left(\frac{22{,}4+\left(-13{,}42\right)}{2},\frac{-10{,}38+\left(-10{,}38\right)}{2}\right)$$

$$\left(\frac{22{,}4-13{,}42}{2},\frac{-10{,}38-10{,}38}{2}\right)$$

$$\left(\frac{8{,}98}{2},\frac{-20{,}76}{2}\right)$$

(4,49 ; –10,38)

Używając przybliżeń $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$ oraz $\sqrt{5}\approx\mathbf{2{,}24}$ sprawdzamy, która z propozycji przedstawionych w odpowiedziach jest najbliższa rezultatowi (**4,49** ; **–10,38**). Zatem:

A. $\left(2\sqrt{5},\ 0\right)\ \to\ \left(2\cdot2{,}24;\ 0\right)\ \to\ \left(4{,}48;\ 0\right)$

B. $\left(-4\sqrt{5},\ 0\right)\ \to\ \left(-4\cdot2{,}24;\ 0\right)\ \to\ \left(-8{,}96;\ 0\right)$

C. $\left(2\sqrt{5},\ -6\sqrt{3}\right)\ \to\ \left(2\cdot2{,}24;\ -6\cdot1{,}73\right)\ \to$ **(4,48 ; –10,38)**

D. $\left(-4\sqrt{5},\ -6\sqrt{3}\right)\ \to\ \left(-4\cdot2{,}24;\ -6\cdot1{,}73\right)\ \to\ \left(-8{,}96;\ -10{,}38\right)$

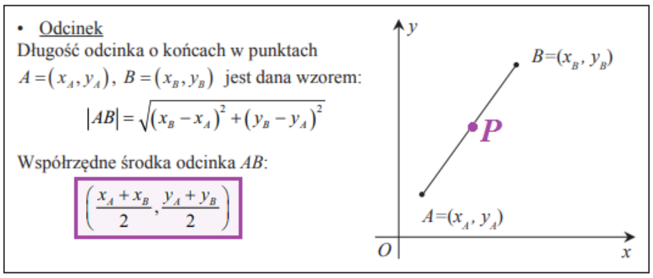
Zatem odp. **C** jest poprawna.

23.22.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że punkt ***P*** musi być **środkiem odcinka *AB***.

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).



$$P=\left(\frac{3+(-5)}{2},\frac{2+(-4)}{2}\right)$$

$$P=\left(\frac{3-5}{2},\frac{2-4}{2}\right)$$

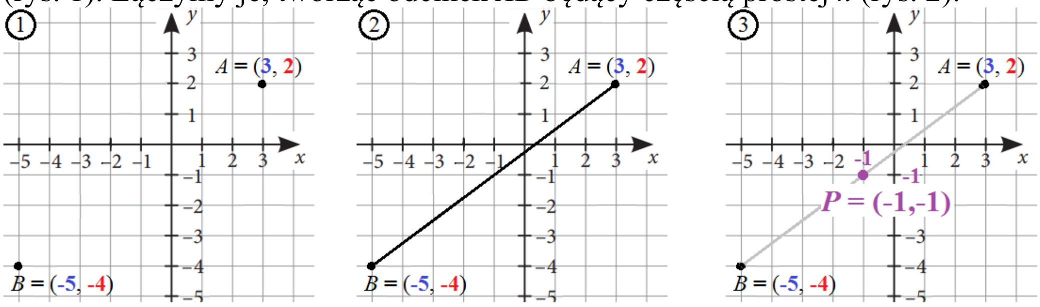
$$P=\left(\frac{-2}{2},\frac{-2}{2}\right)$$

P **= (–1; –1)**

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Wykonujemy dokładny rysunek układu współrzędnych i umieszczamy w nim podane punkty (rys. 1). Łączymy je, tworząc odcinek *AB* będący częścią prostej *k* (rys. 2).



Aby spełniony był warunek $|AP|=|BP|$, to ***P*** musi być **środkiem *AB***.

Znajdujemy położenie środka odcinka, np. za pomocą linijki (rys. 3).

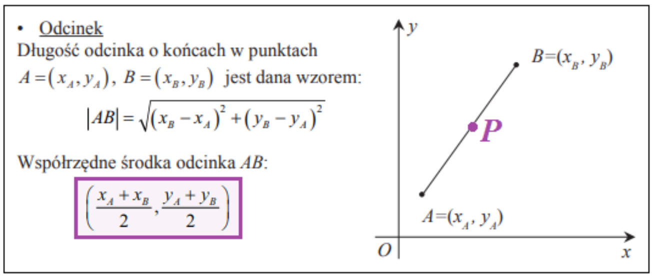
Odczytujemy współrzędne ***P*** = (**–1**, **–1**), więc odp. **D** jest poprawna.

23.23.

Rozwiązanie I:

Z treści zadania wynika, że punkt $\boldsymbol{P}$ musi być **środkiem odcinka $\boldsymbol{AB}$**.

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).



$$P=\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-4+3}{2}\right)$$

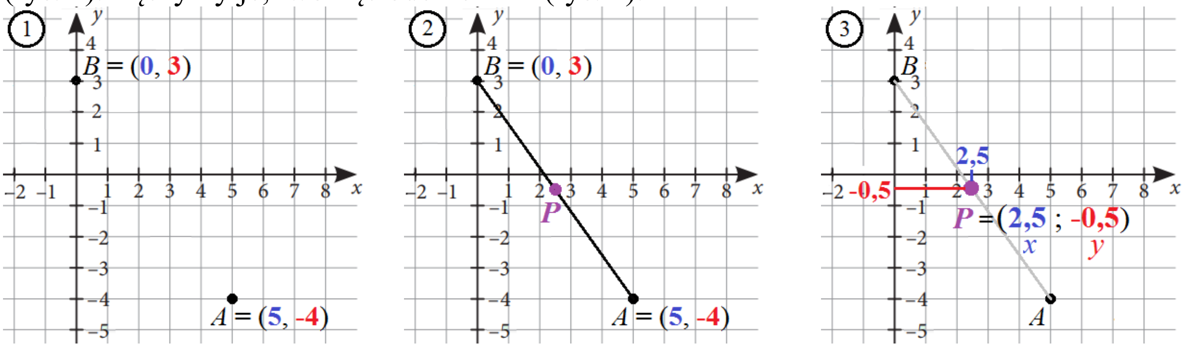
$$P=\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Zatem $\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ oraz $\boldsymbol{y}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Wykonujemy dokładny rysunek układu współrzędnych i umieszczamy w nim podane punkty (rys. 1). Łączymy je, tworząc odcinek AB (rys. 2).



Znajdujemy położenie środka odcinka AB, np. za pomocą linijki (rys. 3).

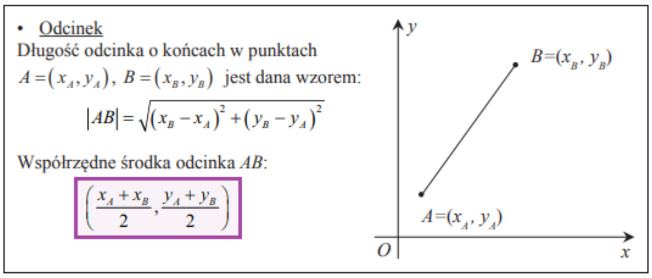
Z rysunku odczytujemy orientacyjne współrzędne $\boldsymbol{P}$ = (**2,5** ; **–0,5**).

Ponieważ $\boldsymbol{x}=\frac{5}{2}=$ **2,5** oraz $\boldsymbol{y}=-\frac{1}{2}=$ **–0,5**, to odp. **B** jest poprawna.

23.24.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).



$$\left(\frac{5\sqrt{2}+\left(-\sqrt{18}\right)}{2},\frac{\sqrt{48}+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{18}}{2},\frac{\sqrt{48}+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{9\cdot 2}}{2},\frac{\sqrt{16\cdot 3}+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5\sqrt{2}-\mathbf{3\sqrt{2}}}{2},\frac{\mathbf{4\sqrt{3}}+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{2},\frac{6\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \left(\mathbf{\sqrt{2}};\ \mathbf{3\sqrt{3}}\right).$$

Odp. **C**

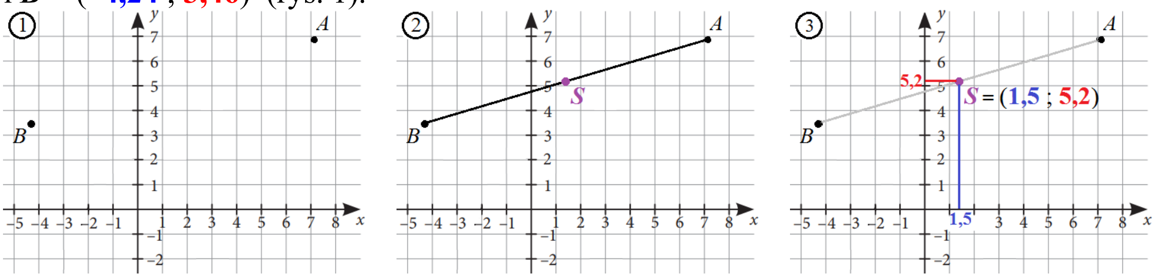
Rozwiązanie II:

Korzystamy z przybliżeń pierwiastków $\sqrt{2}\approx\mathbf{1{,}41}$, $\sqrt{48}\approx\mathbf{6{,}93}$, $\sqrt{18}\approx\mathbf{4{,}24}$, $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$.

Zatem: $A=(5\cdot\mathbf{1{,}41};\ \mathbf{6{,}93})$, więc ***A*** **= (7,05 ; 6,93)**

oraz $B=(-\mathbf{4{,}24};\ 2\cdot\mathbf{1{,}73})$, więc ***B*** **= (–4,24 ; 3,46)**.

Rysujemy dokładnie układ współrzędnych i umieszczamy w nim punkty ***A*** **= (7,05 ; 6,93)** i ***B*** **= (–4,24 ; 3,46)** (rys. 1).



Znajdujemy położenie środka odcinka ***S*** (rys. 2), używając np. linijki.

Orientacyjnie odczytujemy współrzędne punktu ***S*** (rys. 3).

Następnie oceniamy (poprzez przybliżenia $\sqrt{51}\approx\mathbf{7{,}14}$, $\sqrt{2}\approx\mathbf{1{,}41}$, $\sqrt{3}\approx\mathbf{1{,}73}$), która z propozycji znajdujących się w odpowiedziach jest najbliższa rezultatowi ***S*** **= (1,5 ; 5,2)**.

A. $S=\left(\frac{1}{2},\sqrt{51}\right) \rightarrow (0{,}5\ ;\ 7{,}14)$ B. $S=\left(-2\sqrt{2},\ 3\sqrt{3}\right)\rightarrow(-2\cdot\mathbf{1{,}41}\ ;\ 3\cdot\mathbf{1{,}73})\rightarrow(-2{,}82\ ;\ 5{,}19)$

C. $S=\left(\sqrt{2},\ 3\sqrt{3}\right)\rightarrow(\mathbf{1{,}41};\ 3\cdot\mathbf{1{,}73})\rightarrow$ **(1,41 ; 5,19)** D. $S=\left(-2\sqrt{2},\ \sqrt{51}\right)\rightarrow(-2{,}82;\ 7{,}14)$

Współrzędne punktu **(1,41 ; 5,19)** są najbliższe współrzędnym ***S*** **= (1,5 ; 5,2)**.

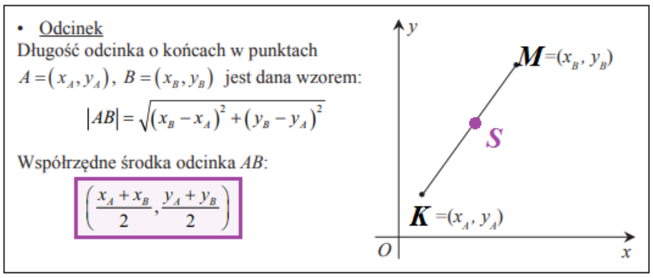
Oznacza to, że odp. **C** jest prawidłowa.

23.25.

Rozwiązanie I:

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 4).

Najpierw wyznaczamy punkt ***S***, czyli środek odcinka *KM*:

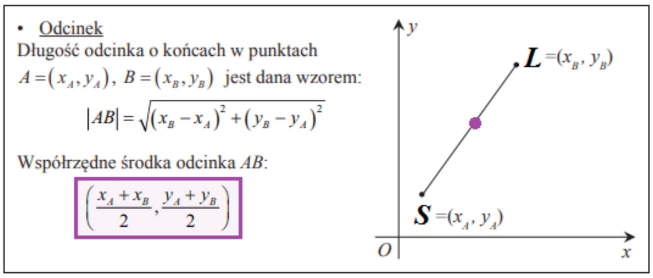


$$S=\left(\frac{1+(-3)}{2},\frac{-1+5}{2}\right)$$

$$S=\left(\frac{1-3}{2},\frac{-1+5}{2}\right)$$

$$S=\left(\frac{-2}{2},\frac{4}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{S}=(-\mathbf{1};\mathbf{2}).$$

Teraz wyznaczamy środek odcinka *SL*, gdzie ***S*** = (**–1**; **2**) oraz ***L*** = (**2** ; **–2**):



$$\left(\frac{-1+2}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right)$$

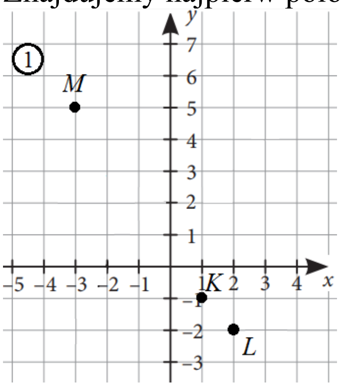
$$\left(\frac{-1+2}{2};\frac{2-2}{2}\right)$$

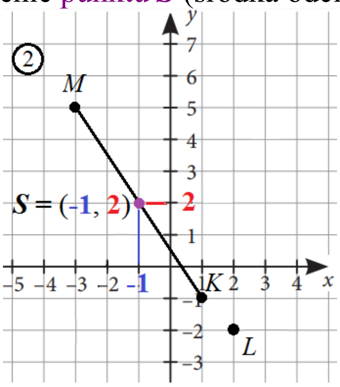
$$\left(\frac{1}{2};\frac{0}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\mathbf{0}\right) \rightarrow \text{Odp. } \mathbf{C}$$

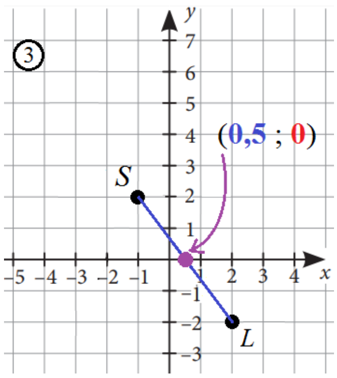
Rozwiązanie II:

Rysujemy układ współrzędnych i zaznaczamy w nim podane punkty (rys. 1).

Znajdujemy najpierw położenie punktu ***S*** (środka odcinka *KM*), np. za pomocą linijki (rys. 2).







Potem, tym samym sposobem szukamy środka odcinka ***SL*** (rys. 3).

Z rysunku orientacyjnie odczytujemy, że środek odcinka ***SL*** ma współrzędne (**0,5** ; **0**), czyli inaczej $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\mathbf{0}\right)$.

Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

23.26.

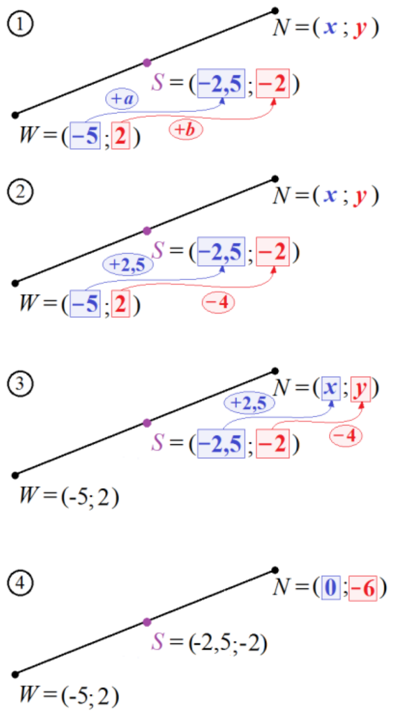
Rysujemy odcinek WN o środku $\boldsymbol{S}$. Należy wyznaczyć współrzędne $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Z danego końca odcinka $\boldsymbol{W} = (\mathbf{-5}; \mathbf{2})$ przechodzimy do środka $\boldsymbol{S}$ (rys. 1).
Otrzymujemy równania

$\mathbf{-5} + \boldsymbol{a} = \mathbf{-2{,}5}$

$\mathbf{2} + \boldsymbol{b} = \mathbf{-2}$

z których wynika, że $\boldsymbol{a} = \mathbf{2{,}5}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{-4}$ (rys. 2).

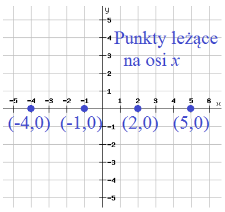


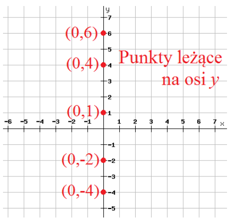
Ze środka $\boldsymbol{S}$ przechodzimy do $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, **konsekwentnie** dodając liczby $\boldsymbol{a} = \mathbf{2{,}5}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{-4}$ do współrzędnych $\boldsymbol{S}$ (rys. 3).
Otrzymujemy równania

$\mathbf{-2{,}5} + \mathbf{2{,}5} = \boldsymbol{x}$

$\mathbf{-2} - \mathbf{4} = \boldsymbol{y}$

z których wynika, że $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{y} = \mathbf{-6}$, tym samym $\boldsymbol{N} = (\mathbf{0}, \mathbf{-6})$ (rys. 4).



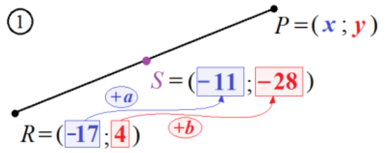


Mając na uwadze to, że punkty o współrzędnych **$(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$** leżą na osi $\boldsymbol{x}$, zaś punkty o współrzędnych **$(\mathbf{0}, \boldsymbol{y})$** leżą na osi y stwierdzamy, że punkt $\boldsymbol{N} = (\mathbf{0}, \mathbf{-6})$ leży **na osi $\boldsymbol{y}$**.

Odp. **D**

23.27.

Rysujemy odcinek *PR* o środku ***S***. Znając jeden z końców oraz środek, należy wyznaczyć współrzędne drugiego z końców odcinka: $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

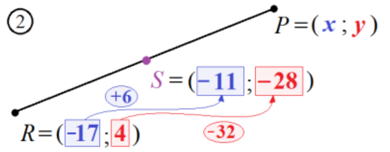


Z danego końca odcinka $\boldsymbol{R} = (\mathbf{-17}; \mathbf{4})$ przechodzimy do środka ***S*** (rys. 1).
Otrzymujemy równania

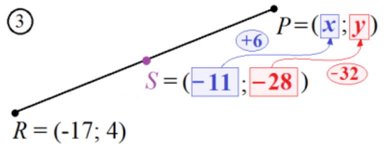
$\mathbf{-17} + \boldsymbol{a} = \mathbf{-11}$

$\mathbf{4} + \boldsymbol{b} = \mathbf{-28}$

z których wynika, że $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{-32}$ (rys. 2).



Ze środka ***S*** przechodzimy do $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, **konsekwentnie** dodając liczby $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{-32}$ do współrzędnych ***S*** (rys. 3).

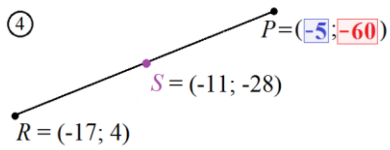


Otrzymujemy równania

$\mathbf{-11 + 6} = \boldsymbol{x}$

$\mathbf{-28 - 32} = \boldsymbol{y}$

z których wynika, że $\boldsymbol{x} = \mathbf{-5}$ i $\boldsymbol{y} = \mathbf{-60}$, tym samym $\boldsymbol{P} = (\mathbf{-5}, \mathbf{-60})$ (rys. 4).



Odp. **A**

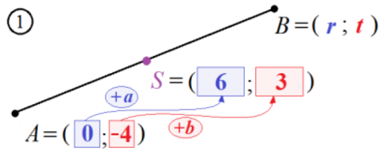
23.28.

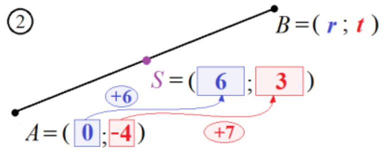
Rysujemy odcinek AB o środku $\boldsymbol{S}$. Znając jeden z końców oraz środek, należy wyznaczyć współrzędne drugiego z końców odcinka: $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$.

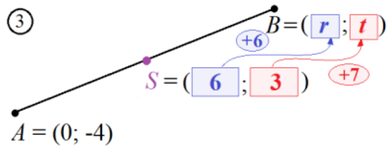
Z danego końca odcinka $\boldsymbol{A} = (\mathbf{0}; \mathbf{-4})$ przechodzimy do środka $\boldsymbol{S}$ (rys. 1).
Otrzymujemy równania
$\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \mathbf{6}$
$\mathbf{-4} + \boldsymbol{b} = \mathbf{3}$
z których wynika, że $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{7}$ (rys. 2).

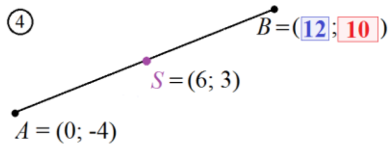
Ze środka $\boldsymbol{S}$ przechodzimy do $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$, **konsekwentnie** dodając liczby $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{7}$ do współrzędnych $\boldsymbol{S}$ (rys. 3).
Otrzymujemy równania
$\mathbf{6} + \mathbf{6} = \boldsymbol{x}$
$\mathbf{3} + \mathbf{7} = \boldsymbol{y}$
z których wynika, że $\boldsymbol{r} = \mathbf{12}$ i $\boldsymbol{t} = \mathbf{10}$, tym samym $\boldsymbol{B} = (\mathbf{12}, \mathbf{10})$ (rys. 4).

Odp. **B**



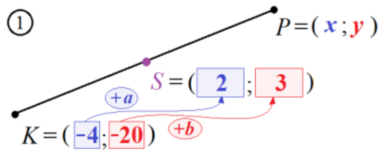






23.29.

Rysujemy odcinek KP o środku $\boldsymbol{S}$. Znając jeden z końców oraz środek, należy wyznaczyć współrzędne drugiego z końców odcinka: $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

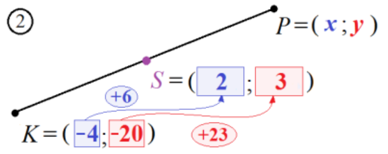


Z danego końca odcinka $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{-4}; \boldsymbol{-20})$ przechodzimy do środka $\boldsymbol{S}$ (rys. 1).
Otrzymujemy równania

$\boldsymbol{-4 + a = 2}$

$\boldsymbol{-20 + b = 3}$

z których wynika, że $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{23}$ (rys. 2).

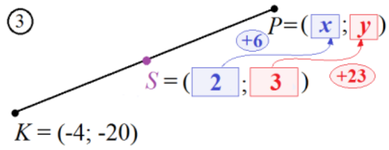


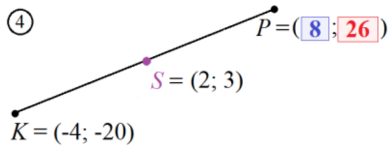
Ze środka $\boldsymbol{S}$ przechodzimy do $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, **konsekwentnie** dodając liczby $\boldsymbol{a} = \mathbf{6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{23}$ do współrzędnych $\boldsymbol{S}$ (rys. 3).
Otrzymujemy równania

$\mathbf{2 + 6} = \boldsymbol{x}$

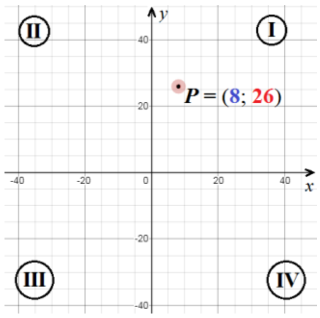
$\mathbf{3 + 23} = \boldsymbol{y}$

z których wynika, że $\boldsymbol{x} = \mathbf{8}$ i $\boldsymbol{y} = \mathbf{26}$, tym samym $\boldsymbol{P} = (\mathbf{8}, \mathbf{26})$ (rys. 4).





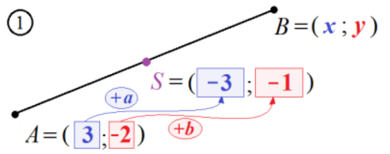
Umieszczając punkt $\boldsymbol{P} = (\mathbf{8}, \mathbf{26})$ w układzie współrzędnych z uwzględnieniem **numeracji ćwiartek** (rys. obok) widzimy, że punkt $\boldsymbol{P}$ należy do **I** ćwiartki układu współrzędnych.



Odp. **A**

23.30.

Rysujemy odcinek AB o środku $\boldsymbol{S}$. Znając jeden z końców oraz środek, należy wyznaczyć współrzędne drugiego z końców odcinka: $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

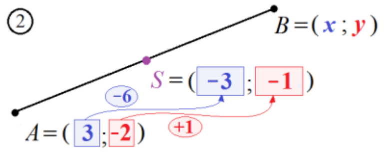


Z danego końca odcinka $\boldsymbol{A} = (3; -2)$ przechodzimy do środka $\boldsymbol{S}$ (rys. 1).
Otrzymujemy równania

$\mathbf{3} + \boldsymbol{a} = \mathbf{-3}$

$\mathbf{-2} + \boldsymbol{b} = \mathbf{-1}$

z których wynika, że $\boldsymbol{a} = \mathbf{-6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$ (rys. 2).

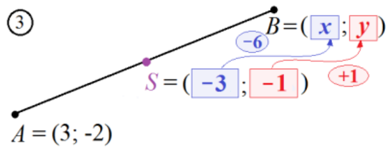


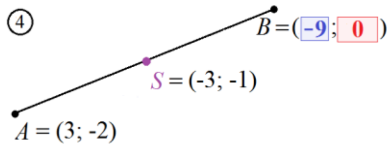
Ze środka $\boldsymbol{S}$ przechodzimy do $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, **konsekwentnie** dodając liczby $\boldsymbol{a} = \mathbf{-6}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$ do współrzędnych $\boldsymbol{S}$ (rys. 3).
Otrzymujemy równania

$\mathbf{-3} - \mathbf{6} = \boldsymbol{x}$

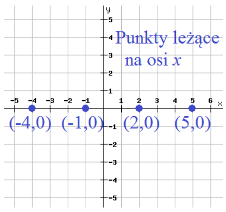
$\mathbf{-1} + \mathbf{1} = \boldsymbol{y}$

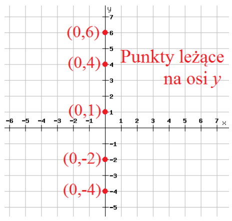
z których wynika, że $\boldsymbol{x} = \mathbf{-9}$ i $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, tym samym $\boldsymbol{B} = (\mathbf{-9}, \mathbf{0})$ (rys. 4).





Mając na uwadze to, że punkty o współrzędnych $(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$ leżą na osi $\boldsymbol{x}$, zaś punkty o współrzędnych $(\mathbf{0}, \boldsymbol{y})$ leżą na osi y stwierdzamy, że punkt $\boldsymbol{B} = (\mathbf{-9}, \mathbf{0})$ leży **na osi $\boldsymbol{x}$**.





Odp. **C**

23.31.

Rozwiązanie I:

$y = ax + b$ → równanie prostej k

$\begin{cases} -3 = a \cdot 4 + b \\ 3 = a \cdot (-8) + b \end{cases}$ → punkty (4; –3) oraz (–8; 3) należą do prostej k

$\begin{cases} -3 = 4a + b \\ 3 = -8a + b \end{cases} \quad | \cdot (-1)$

$+\begin{cases} -3 = 4a + b \\ -3 = 8a - b \end{cases}$ → są przeciwne współczynniki przy $\boldsymbol{b}$; dodajemy równania stronami

$-6 = 12a \quad |:12$

$-\frac{6}{12} = a$ → skracamy ułamek przez 6

$a = -\mathbf{\frac{1}{2}}$

$-3 = a \cdot 4 + b$ → wstawiamy obliczone $a = -\frac{1}{2}$ i wyliczamy $\boldsymbol{b}$

$-3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$

$-3 = -2 + b$

$-3 + 2 = b$

$-\mathbf{1} = b$

$y = ax + b$ → podstawiamy $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$ → równanie prostej k

$y = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x} - 1$ → punkt R = (**6–*m***; **2*m*–1**) → wstawiamy $\boldsymbol{y = 2m-1}$ oraz $\boldsymbol{x = (6-m)}$

$\mathbf{2m-1} = -\frac{1}{2}\mathbf{(6-m)} - 1$ → wyliczamy szukane $\boldsymbol{m}$ z równania

$2m - 1 = -3 + \frac{1}{2}m - 1$

$2m - 1 = -3 + 0{,}5m - 1$

$2m - 0{,}5m = -3 - 1 + 1$

$1{,}5m = -3 \quad |:1{,}5$

$m = -\mathbf{2}$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Do punktu $R = (6–m, 2m–1)$ podstawiamy w miejsce $\boldsymbol{m}$ wartości liczbowe proponowane w odpowiedziach, ustalając położenie punktu $\boldsymbol{R}$.

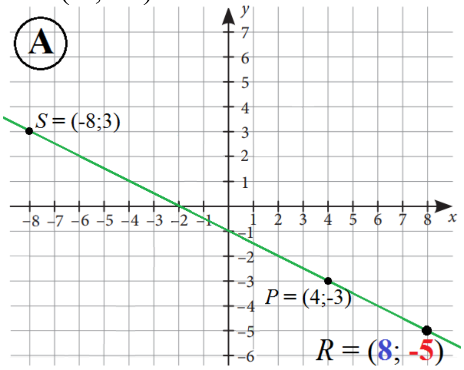
Dla każdej z odpowiedzi rysujemy układ współrzędnych i patrzymy (np. poprzez przyłożenie linijki), czy punkty P, R, S leżą na jednej prostej.

A. $\boldsymbol{m = –2}$

$R = (6 –(–2) \,;\, 2\cdot(–2)–1)$

$R = (6+2 \,;\, –4–1)$

$\boldsymbol{R} = (8 \,;\, –5)$

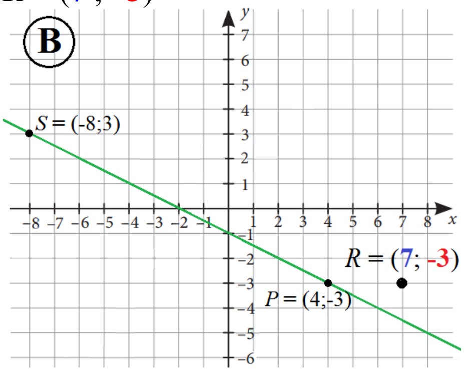


B. $\boldsymbol{m = –1}$

$R = (6 –(–1) \,;\, 2\cdot(–1)–1)$

$R = (6+1 \,;\, –2–1)$

$\boldsymbol{R} = (7 \,;\, –3)$

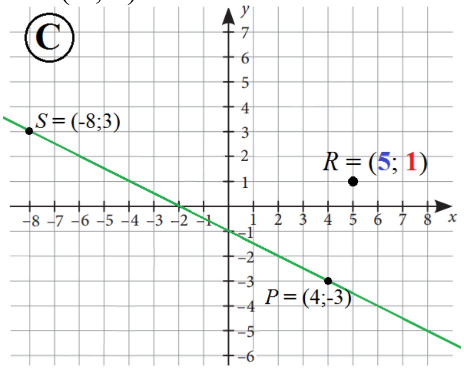


C. $\boldsymbol{m = 1}$

$R = (6 –1 \,;\, 2\cdot1–1)$

$R = (6–1 \,;\, 2–1)$

$\boldsymbol{R} = (5 \,;\, 1)$

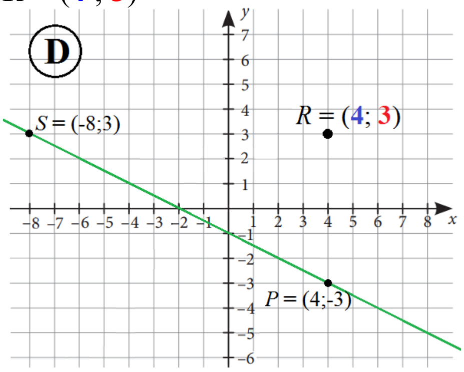


D. $\boldsymbol{m = 2}$

$R = (6 – 2 \,;\, 2\cdot2–1)$

$R = (6–2 \,;\, 4–1)$

$\boldsymbol{R} = (4 \,;\, 3)$



Wyraźnie widać, że tylko w przypadku odp. **A** wszystkie trzy punkty leżą na jednej prostej.

Oznacza to, że odp. **A** jest prawidłowa.

23.32.

Rozwiązanie I:

$y = ax + b$ → równanie prostej *KL*

$\begin{cases} -5 = a \cdot 2 + b \\ 1 = a \cdot 0 + b \end{cases}$ → punkty (2; –5) oraz (0; 1) należą do prostej *KL*

$\begin{cases} -5 = 2a + b \\ 1 = b \end{cases}$

$-5 = 2a + b$ → wstawiamy obliczone $\boldsymbol{b = 1}$ i wyliczamy $\boldsymbol{a}$

$-5 = 2a + 1$

$-2a = 1 + 5$

$-2a = 6 \qquad |:(-2)$

$a = \mathbf{-3}$

$y = ax + b$ → podstawiamy $a = -3$, $b = 1$

$y = -3x + 1$ → równanie prostej *KL*

$y = -3x + 1$ → punkt $M = (3; d)$ → wstawiamy $y = d$ oraz $x = 3$

$d = -3 \cdot 3 + 1$ → wyliczamy szukane $\boldsymbol{d}$ z równania

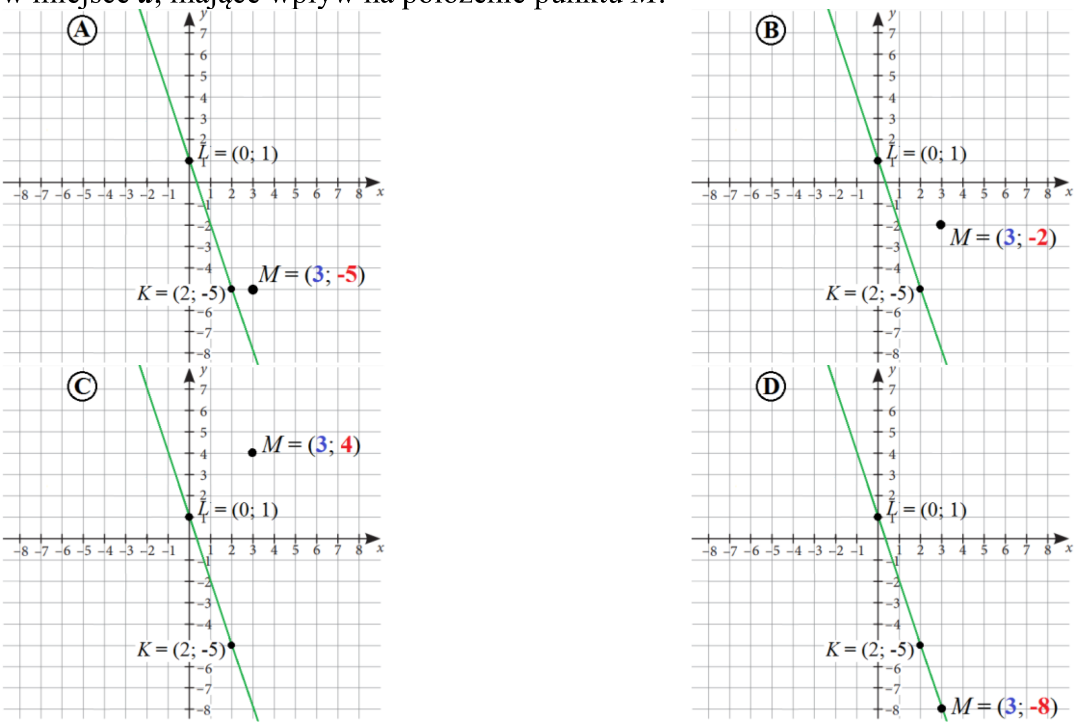
$d = -9 + 1$

$\boldsymbol{d = -8}$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Analizujemy poszczególne odpowiedzi, podstawiając proponowane wartości liczbowe w miejsce ***d***, mające wpływ na położenie punktu *M*.



Jedynie w przypadku odp. **D**, czyli dla $\boldsymbol{m = -8}$, wszystkie trzy punkty leżą na jednej prostej. Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

23.33.

Rozwiązanie I:

$y = ax + b$ → równanie prostej będącej wykresem funkcji f

$$\begin{cases} -4 = a \cdot 0 + b \\ -2 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$ → punkty (0; –4) oraz (4; –2) należą do wykresu funkcji f

$$\begin{cases} -4 = b \\ -2 = 4a + b \end{cases}$$

$-2 = 4a + b$ → wstawiamy obliczone $\boldsymbol{b = -4}$ i wyliczamy $\boldsymbol{a}$

$-2 = 4a + (-4)$

$-2 = 4a - 4$

$-2 + 4 = 4a$

$2 = 4a \qquad |:4$

$\frac{2}{4} = a \quad \to \quad a = \mathbf{0{,}5}$

$y = ax + b$ → podstawiamy $a = 0{,}5$, $b = -4$

$y = 0{,}5x - 4$ → równanie prostej będącej wykresem funkcji f

$\boldsymbol{y} = 0{,}5\boldsymbol{x} - 4$ → punkt ($\boldsymbol{m}$; **–5**) → wstawiamy $\boldsymbol{y = -5}$ oraz $\boldsymbol{x = m}$

–5 $= 0{,}5\boldsymbol{m} - 4$ → wyliczamy szukane $\boldsymbol{m}$ z równania

$-5 + 4 = 0{,}5m$

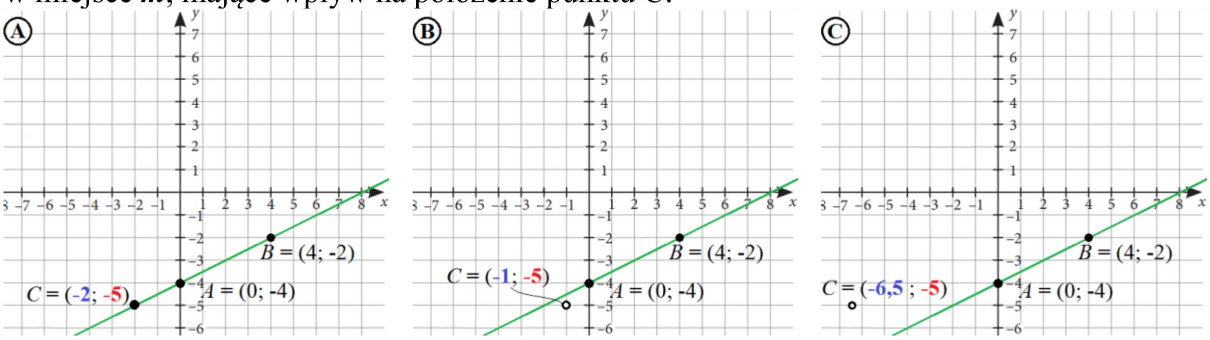
$-1 = 0{,}5m$

$\boldsymbol{m = -2}$

Odp. **A**

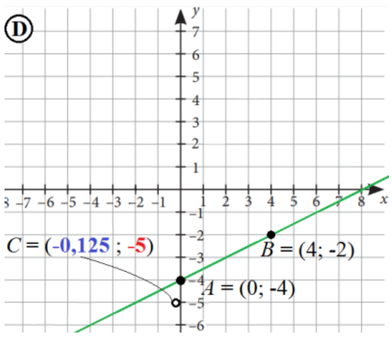
Rozwiązanie II:

Analizujemy poszczególne odpowiedzi, podstawiając proponowane wartości liczbowe w miejsce $\boldsymbol{m}$, mające wpływ na położenie punktu C.

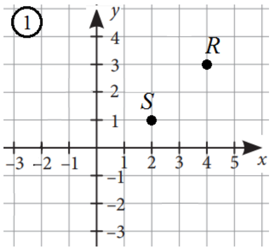


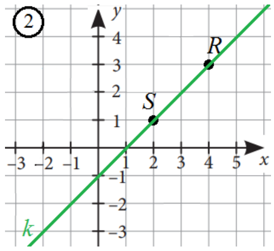
Z rysunków przedstawionych obok widać, że jedynie dla $\boldsymbol{m = -2}$ wszystkie trzy punkty: A, B i C leżą na jednej prostej.

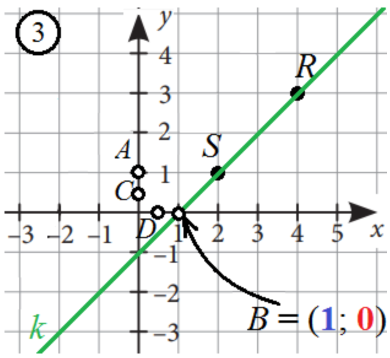
Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.



23.34.







Rysujemy układ współrzędnych i umieszczamy w nim dane punkty R i S (rys. 1).
Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty R i S (rys. 2).
Umieszczamy w układzie współrzędnych podane w odpowiedziach punkty (rys. 3).

Spośród podanych w odpowiedziach punktów, tylko punkt $\boldsymbol{B} = (\mathbf{0}; \mathbf{1})$ należy do prostej k.

Odp. **B**

23.35.

Rozwiązanie I:

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

$y = ax + b$ → równanie prostej l

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ -6 = a \cdot 3 + b \end{cases}$$ → punkty (0; 0) oraz (3; –6) należą do wykresu funkcji f

$$\begin{cases} 0 = b \\ -6 = 3a + b \end{cases}$$

$-6 = 3a + b$ → wstawiamy obliczone $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ i wyliczamy $\boldsymbol{a}$

$-6 = 3a + 0$

$-6 = 3a \qquad |:3$

$\mathbf{-2} = a$

$y = ax + b$ → podstawiamy $a = -2,\ b = 0$

$y = -2x$ → równanie prostej l

$y = -2x$ → punkt (**4**; ***m*–1**) → wstawiamy $y = m - 1$ oraz $x = 4$

$m - 1 = -2 \cdot 4$ → wyliczamy szukane ***m*** z równania

$m - 1 = -8$

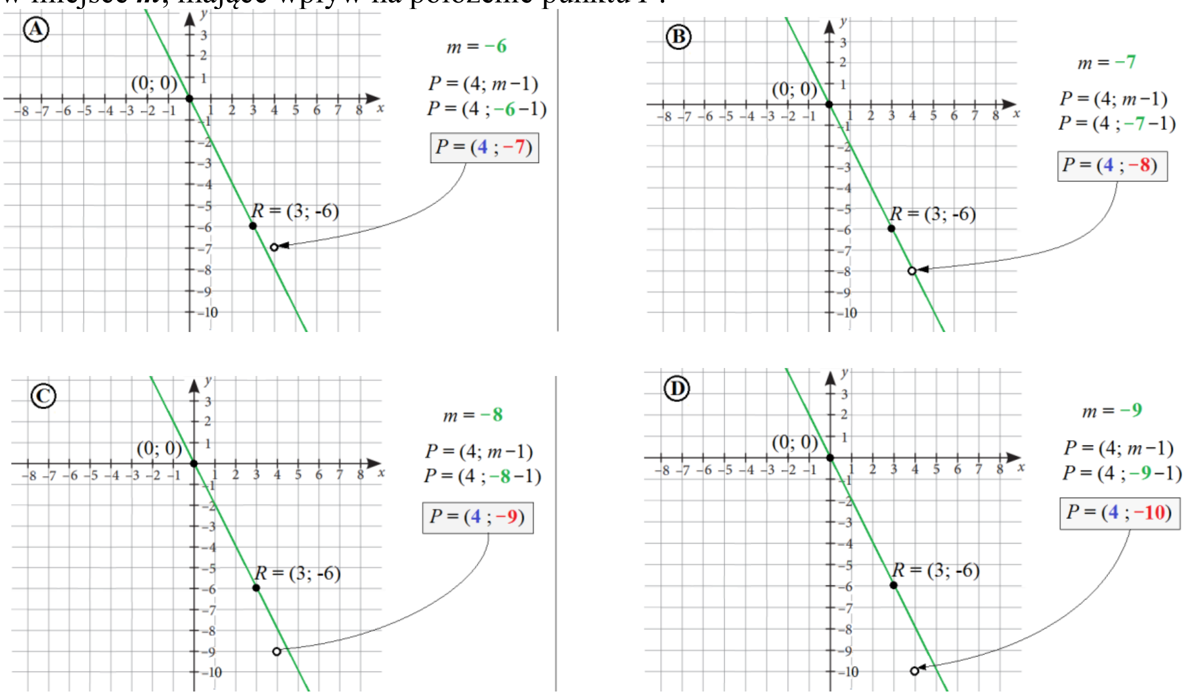
$m = -8 + 1$

$\boldsymbol{m = -7}$

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

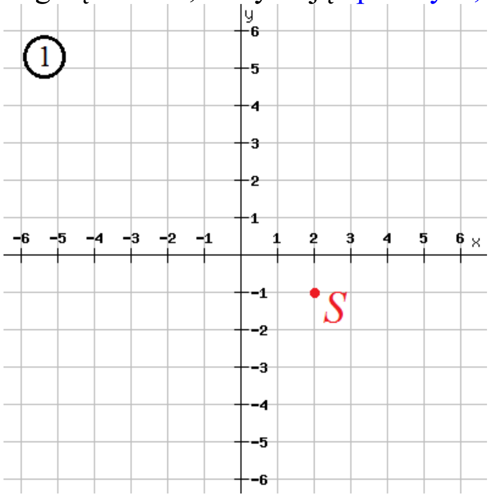
Analizujemy poszczególne odpowiedzi, podstawiając proponowane wartości liczbowe w miejsce ***m***, mające wpływ na położenie punktu P.

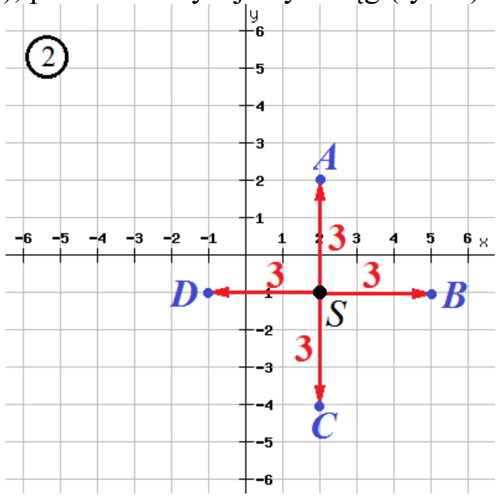


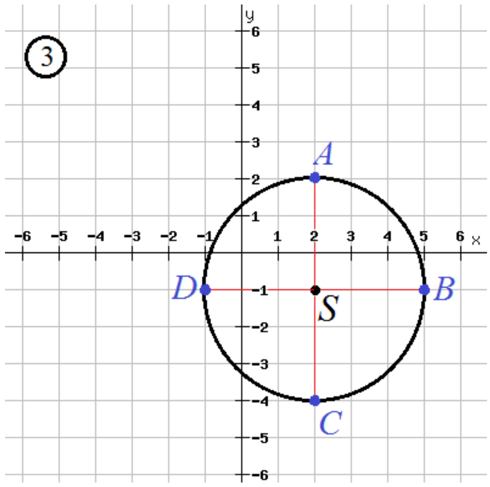
Jedynie w przypadku odp. **B**, czyli dla ***m* = –7**, punkt $R = (3, -6)$, punkt P oraz początek układu współrzędnych leżą na jednej prostej.

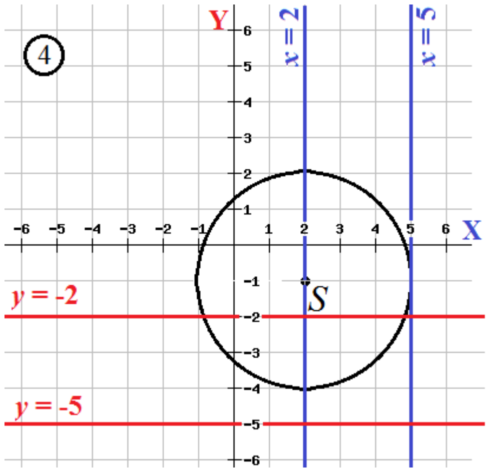
Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

23.36.
Umieszczamy punkt S w układzie współrzędnych (rys. 1). Z treści zadania wynika, że $2r = 6$, zatem promień $r = 3$. Ze środka okręgu odmierzamy długość promienia w lewo, w prawo, w górę i w dół, otrzymując punkty A, B, C i D (rys. 2), przez które rysujemy okrąg (rys. 3).



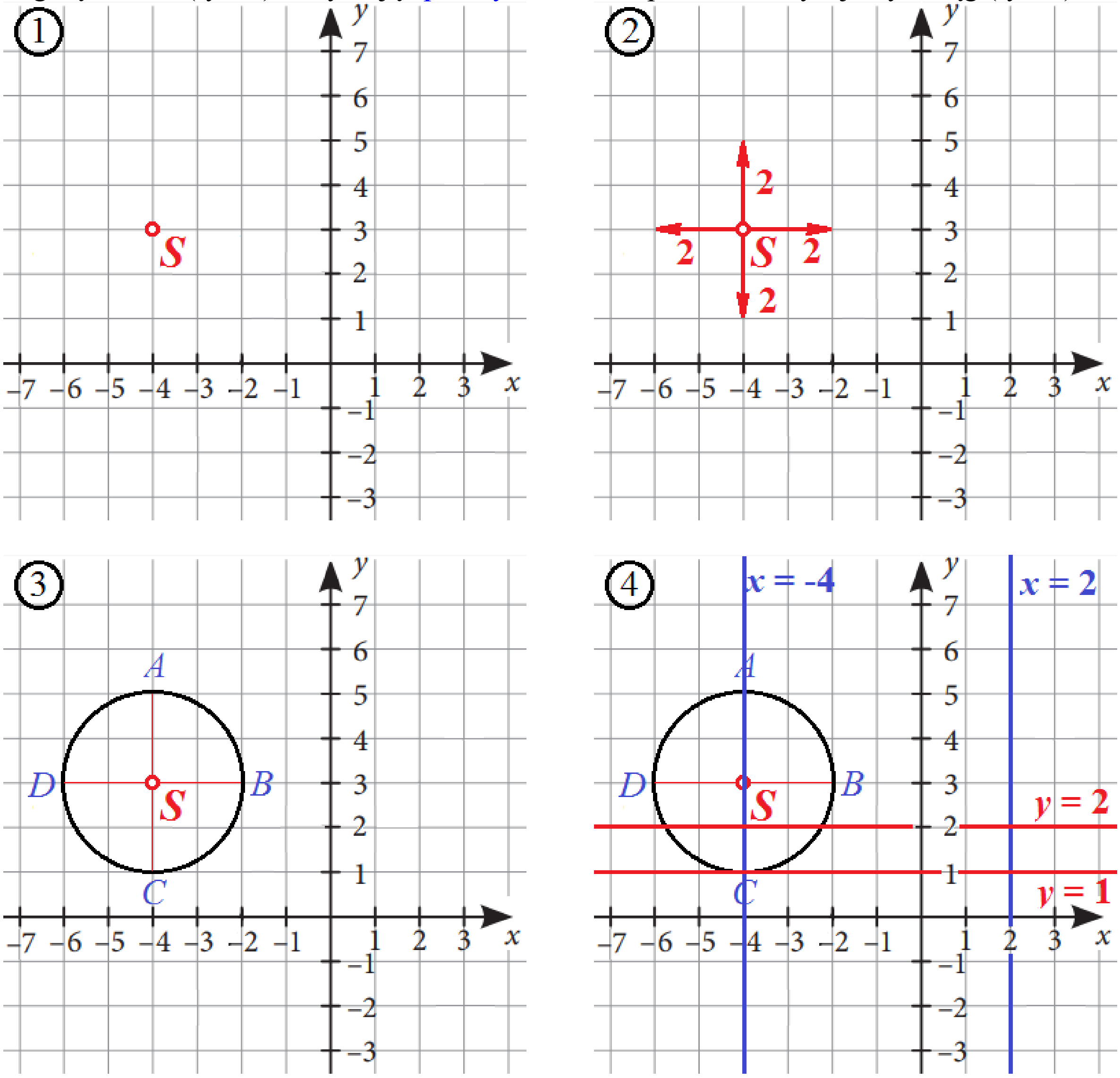






Rysujemy proste o równaniach podanych w odpowiedziach.
Pamiętajmy, że proste o równaniach ***x* = ...** są pionowe i przechodzą przez podany w równaniu x, zaś proste o równaniach ***y* = ...** są poziome i przechodzą przez podany w równaniu y.
Widać (z rys. 4), że prosta $\boldsymbol{x = 5}$ jest styczna do okręgu (ta prosta styka się z okręgiem tylko w jednym punkcie).
Odp. **B**

23.37.
Umieszczamy punkt S w układzie współrzędnych (rys. 1). Z treści zadania wynika, że promień $r = 2$. Ze środka okręgu odmierzamy długość promienia w lewo, w prawo, w górę i w dół (rys. 2) otrzymując punkty A, B, C, D przez które rysujemy okrąg (rys. 3).

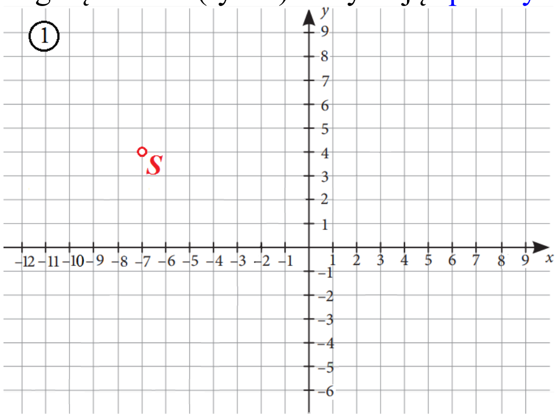


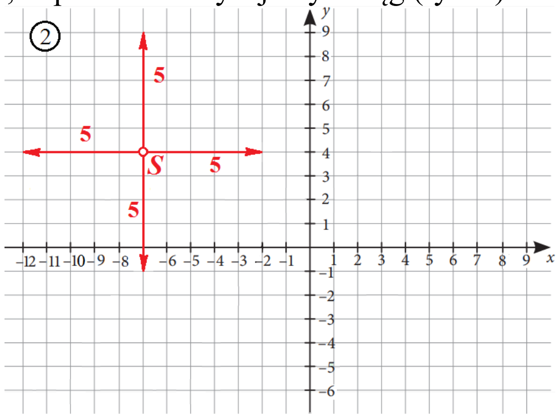
Rysujemy linie opisane równaniami przedstawionymi w odpowiedziach.

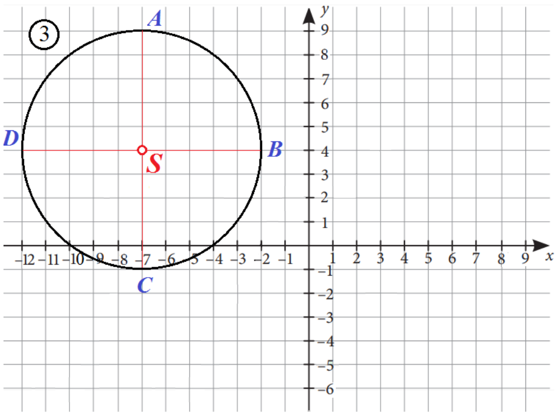
Jedynie prosta o równaniu $y = 1$ **ma dokładnie jeden punkt** wspólny z okręgiem.

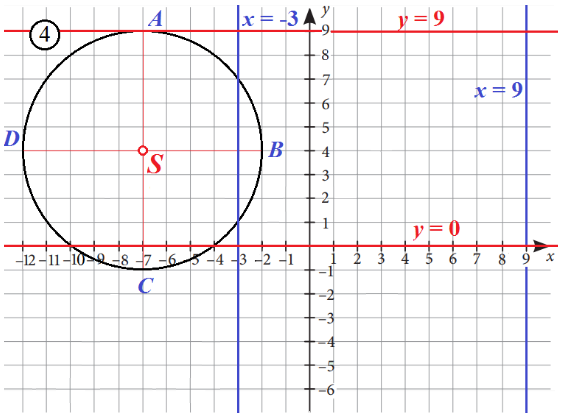
Odp. **C**

23.38.
Umieszczamy punkt S w układzie współrzędnych (rys. 1). Z treści zadania wynika, że promień $r = 5$. Ze środka okręgu odmierzamy długość promienia w lewo, w prawo, w górę i w dół (rys. 2) otrzymując punkty A, B, C, D przez które rysujemy okrąg (rys. 3).









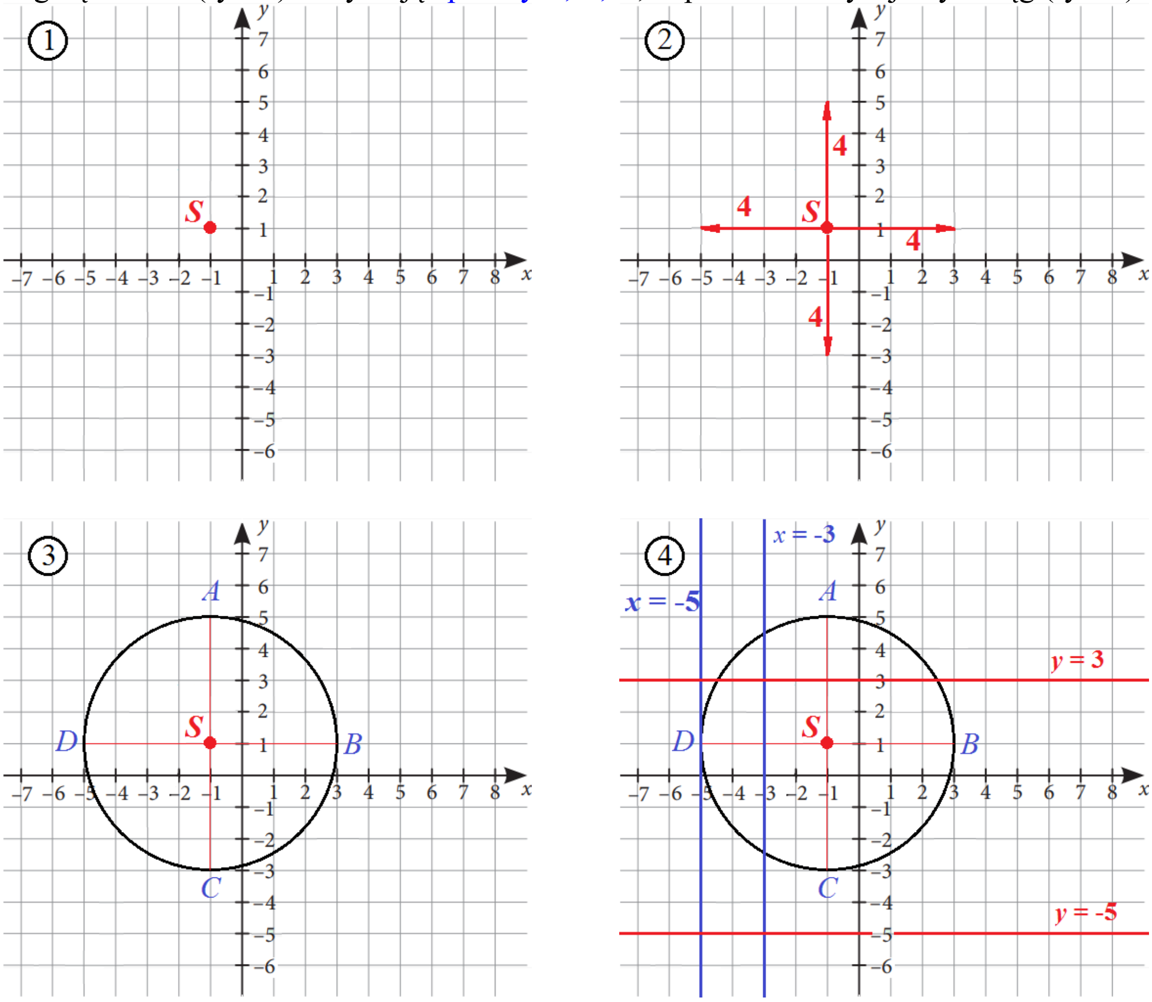
Rysujemy linie opisane równaniami przedstawionymi w odpowiedziach.

Jedynie prosta o równaniu $y = 9$ **ma dokładnie jeden punkt** wspólny z okręgiem.

Odp. **C**

23.39.

Umieszczamy punkt S w układzie współrzędnych (rys. 1). Z treści zadania wynika, że promień $r = 4$. Ze środka okręgu odmierzamy długość promienia w lewo, w prawo, w górę i w dół (rys. 2) otrzymując punkty A, B, C, D przez które rysujemy okrąg (rys. 3).



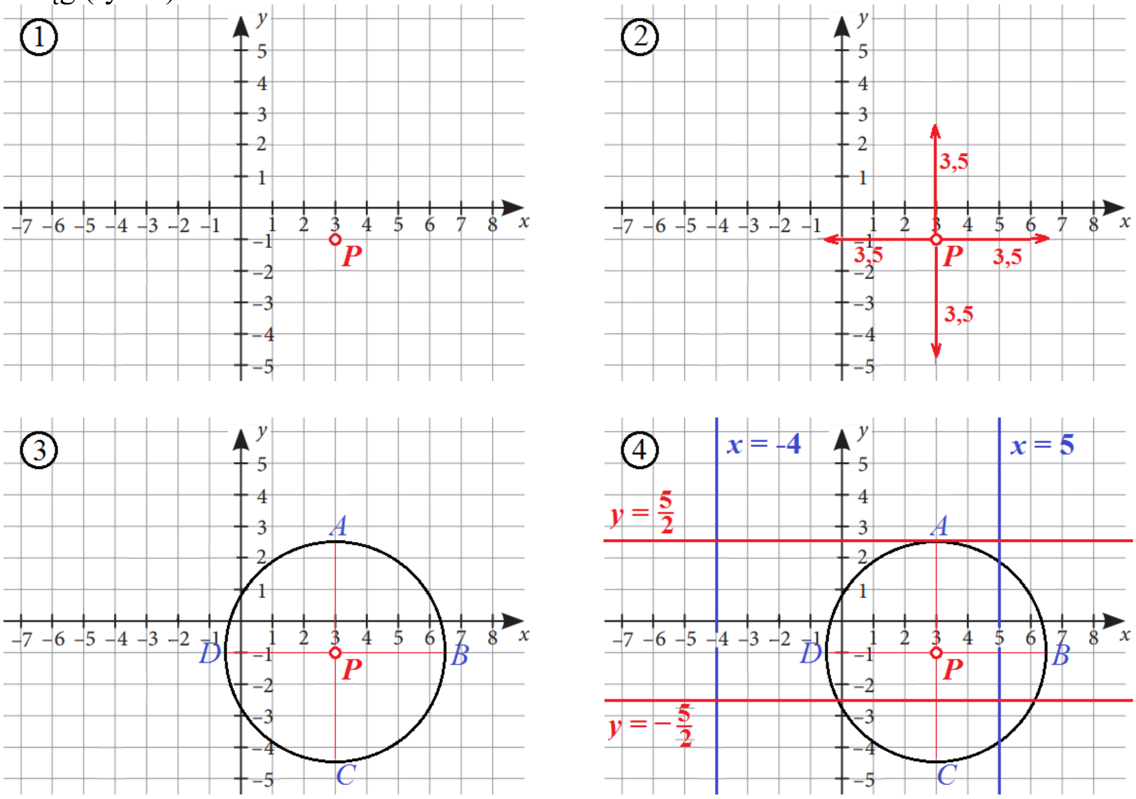
Rysujemy linie opisane równaniami przedstawionymi w odpowiedziach.

Jedynie prosta o równaniu $x = -5$ **ma dokładnie jeden punkt** wspólny z okręgiem.

Odp. **A**

23.40.

Umieszczamy punkt P w układzie współrzędnych (rys. 1). Z treści zadania wynika, że średnica $2r = 7$, więc promień $r = 3{,}5$. Ze środka okręgu odmierzamy długość promienia w lewo, w prawo, w górę i w dół (rys. 2) otrzymując punkty A, B, C, D przez które rysujemy okrąg (rys. 3).



Rysujemy linie opisane równaniami przedstawionymi w odpowiedziach.

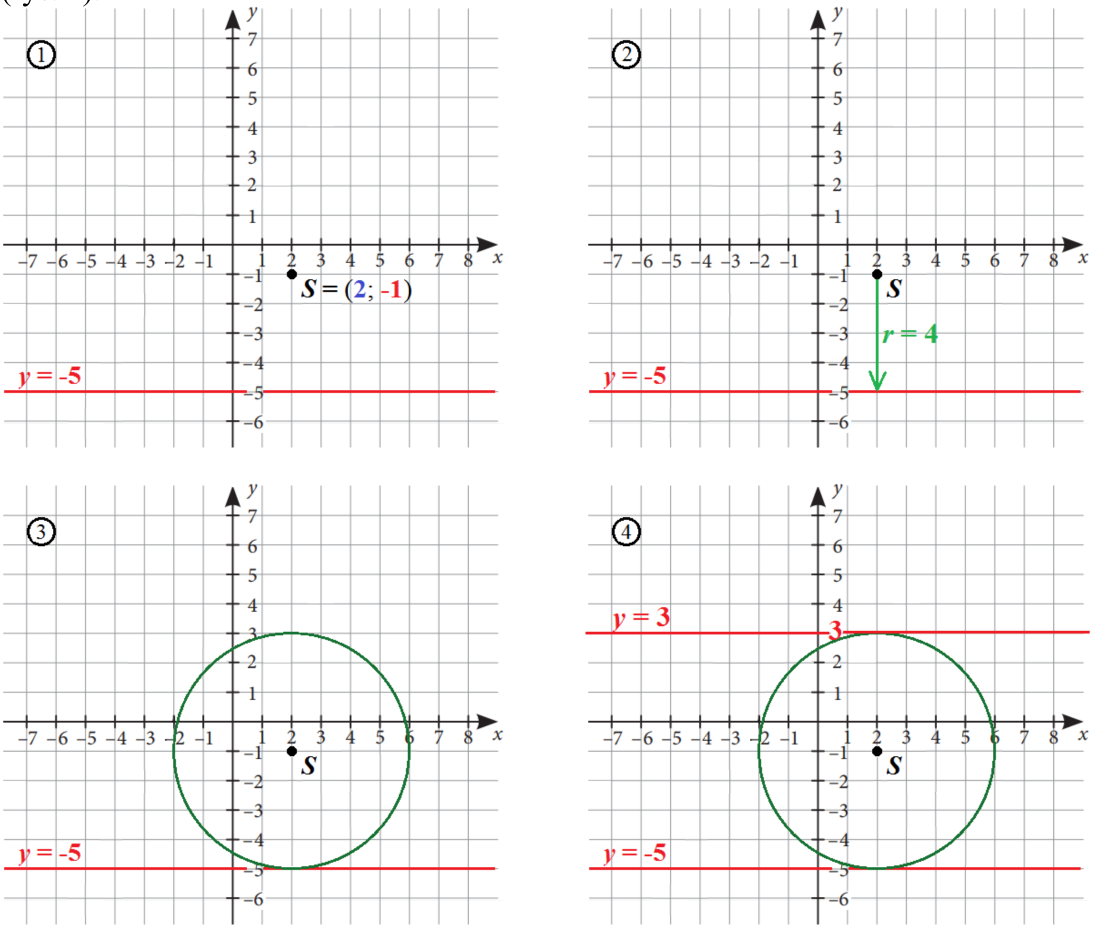
Jedynie prosta o równaniu $y = \frac{5}{2}$, czyli $y = 2{,}5$ **ma dokładnie jeden punkt** wspólny z okręgiem.

Odp. **D**

23.41.

W układzie współrzędnych rysujemy prostą o równaniu $y = -5$ oraz zaznaczamy **środek okręgu S** (rys. 1).

Następnie, odmierzamy odległość od punktu S do prostej $y = -5$, która to odległość jest promieniem okręgu. W tym zadaniu ta odległość wynosi **4 kratki**, więc promień okręgu $r = 4$ (rys. 2).

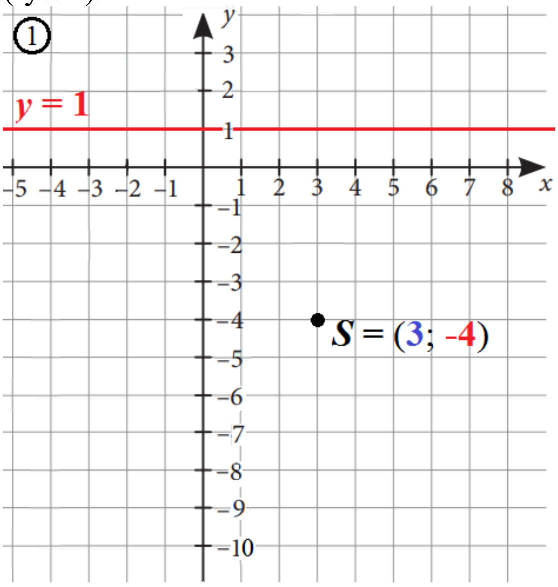


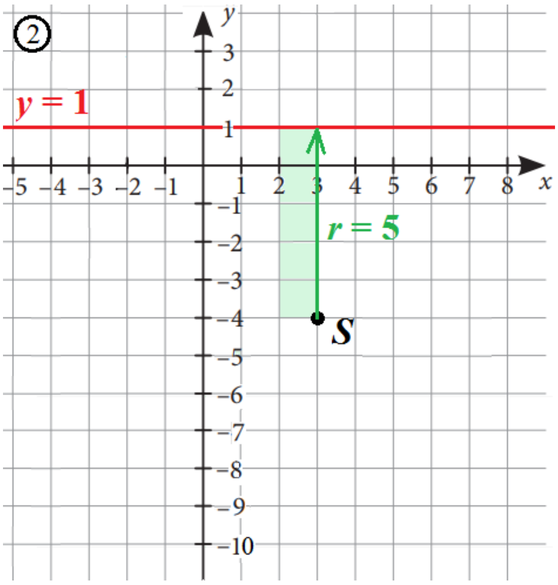
Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $r = 4$ (rys. 3).

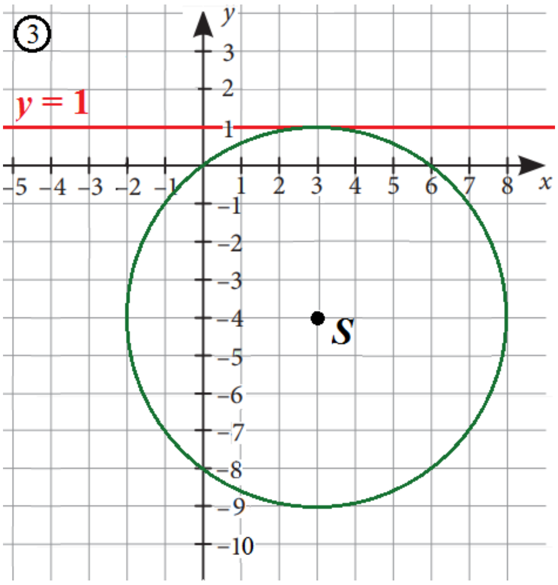
Prosta o równaniu $y = 3$ jest **styczna do okręgu** (rys. 4), tym samym $m = 3$.

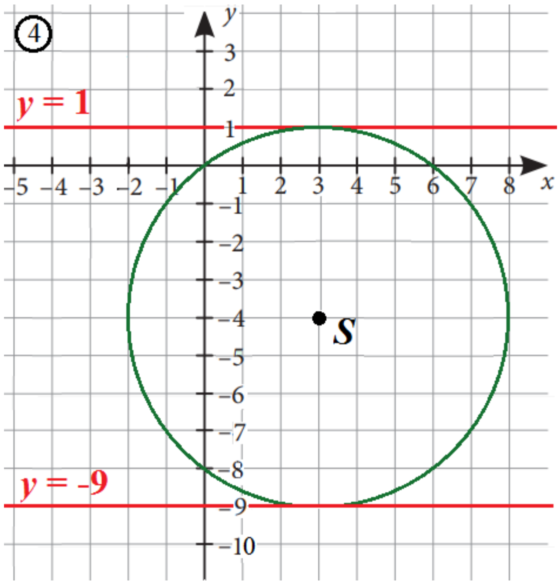
Odp. **C**

23.42.
W układzie współrzędnych rysujemy prostą o równaniu $y = 1$ oraz zaznaczamy **środek okręgu S** (rys. 1).
Następnie, odmierzamy odległość od punktu S do prostej $y = 1$, która to odległość jest promieniem okręgu. W tym zadaniu ta odległość wynosi **5 kratek**, więc promień okręgu $r = 5$ (rys. 2).









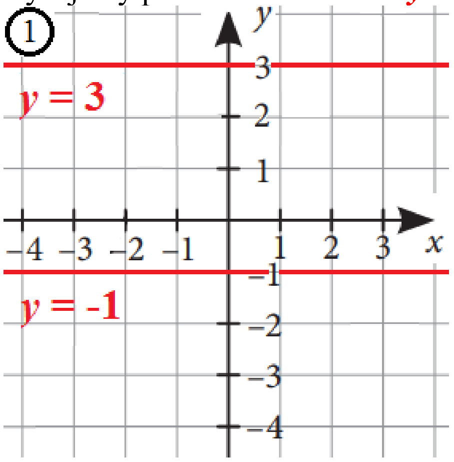
Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $r = 5$ (rys. 3).

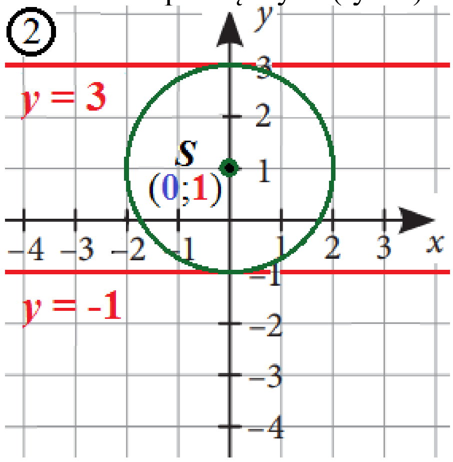
Prosta o równaniu $y = -9$ jest **styczna do okręgu** (rys. 4), tym samym $m = -9$.

Odp. **D**

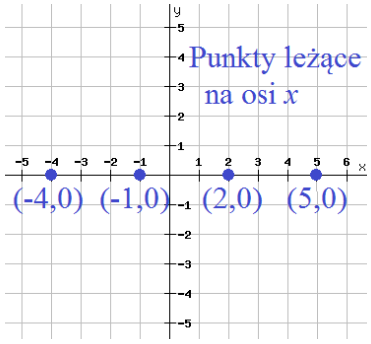
23.43.

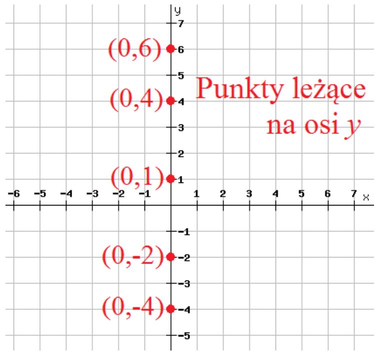
Rysujemy proste o równaniach $y = 3$ oraz $y = -1$ w układzie współrzędnych (rys. 1).





Napis $S = (0, b)$ sugeruje, że mamy do czynienia z punktem, który leży na osi y.





Zatem środek okręgu musi leżeć na osi y **dokładnie w połowie** między liczbami $y = 3$ oraz $y = -1$ na pionowej osi y (rys. 2).

Zatem $S = (0; 1)$, tym samym $b = 1$.

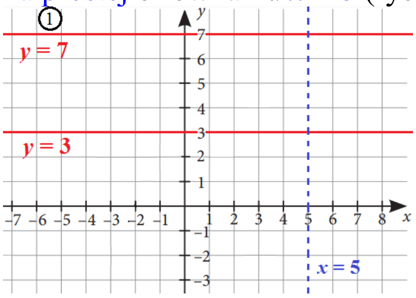
Odp. **C**

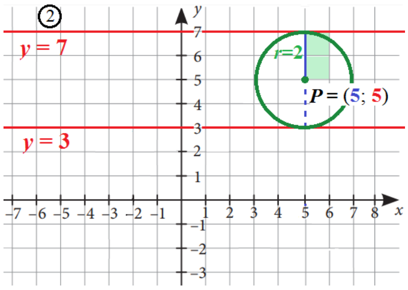
23.44.

Rozwiązanie I:

Rysujemy proste o równaniach $y = 3$ oraz $y = 7$ w układzie współrzędnych.

Wskazówką jest współrzędna $x = 5$ punktu $P = (5; k–2)$, która oznacza, że punkt P musi leżeć na prostej o równaniu $x = 5$ (rys. 1).





Aby obie proste $y = 3$ oraz $y = 7$ były styczne do koła, to koło musi mieć swój środek dokładnie w połowie między stycznymi (rys. 2).

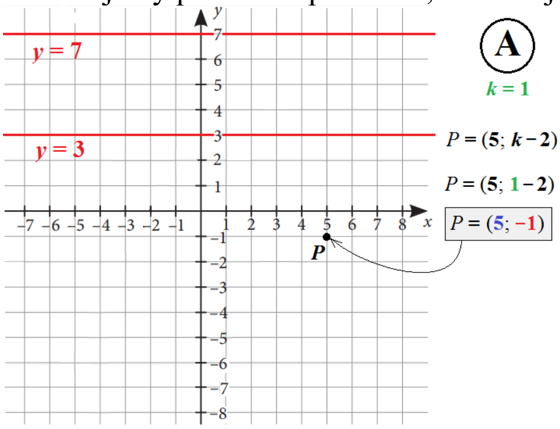
Napis $P = (5, k–2)$ w treści zadania porównujemy z napisem $\boldsymbol{P} = (5; 5)$, wynikającym z rys. 2. Przez porównanie drugich współrzędnych wynika, że $k – 2 = 5$, stąd $k = 7$.

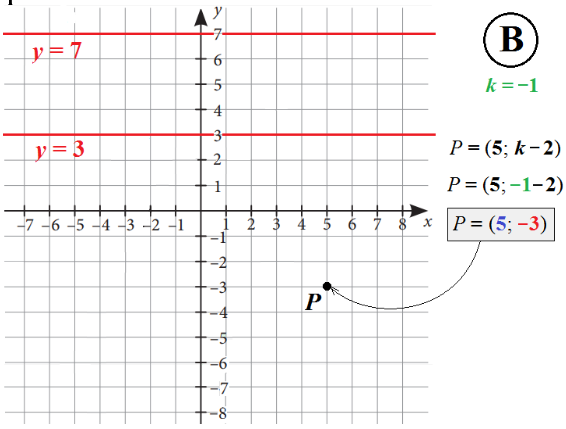
Odp. **D**

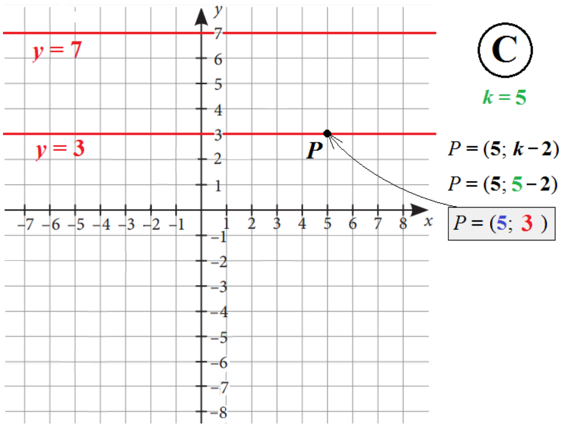
Rozwiązanie II:

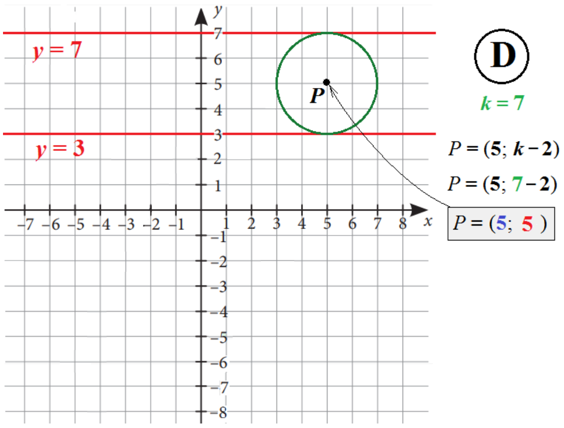
W układzie współrzędnych rysujemy proste o równaniach $y = 3$ oraz $y = 7$.

Analizujemy podane odpowiedzi, wstawiając proponowane wartości k.



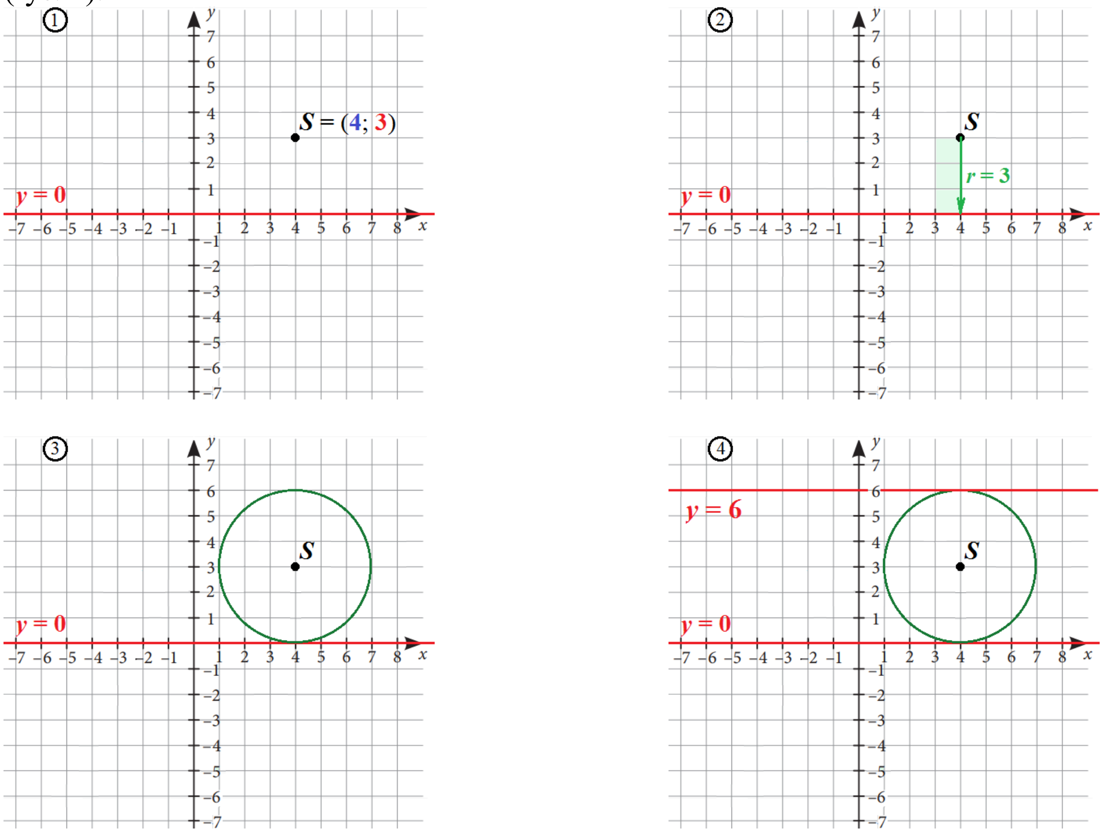






Jedynie w przypadku odp. **D** jesteśmy w stanie narysować koło o środku $\boldsymbol{P}$, styczne do obu danych prostych. Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

23.45.
W układzie współrzędnych rysujemy prostą o równaniu $y = 0$ (pokrywa się z osią Ox) oraz zaznaczamy **środek okręgu S** (rys. 1).
Następnie, odmierzamy odległość od punktu S do prostej $y = 0$, która to odległość jest promieniem okręgu. W tym zadaniu ta odległość wynosi **3 kratki**, więc promień okręgu $r = 3$ (rys. 2).

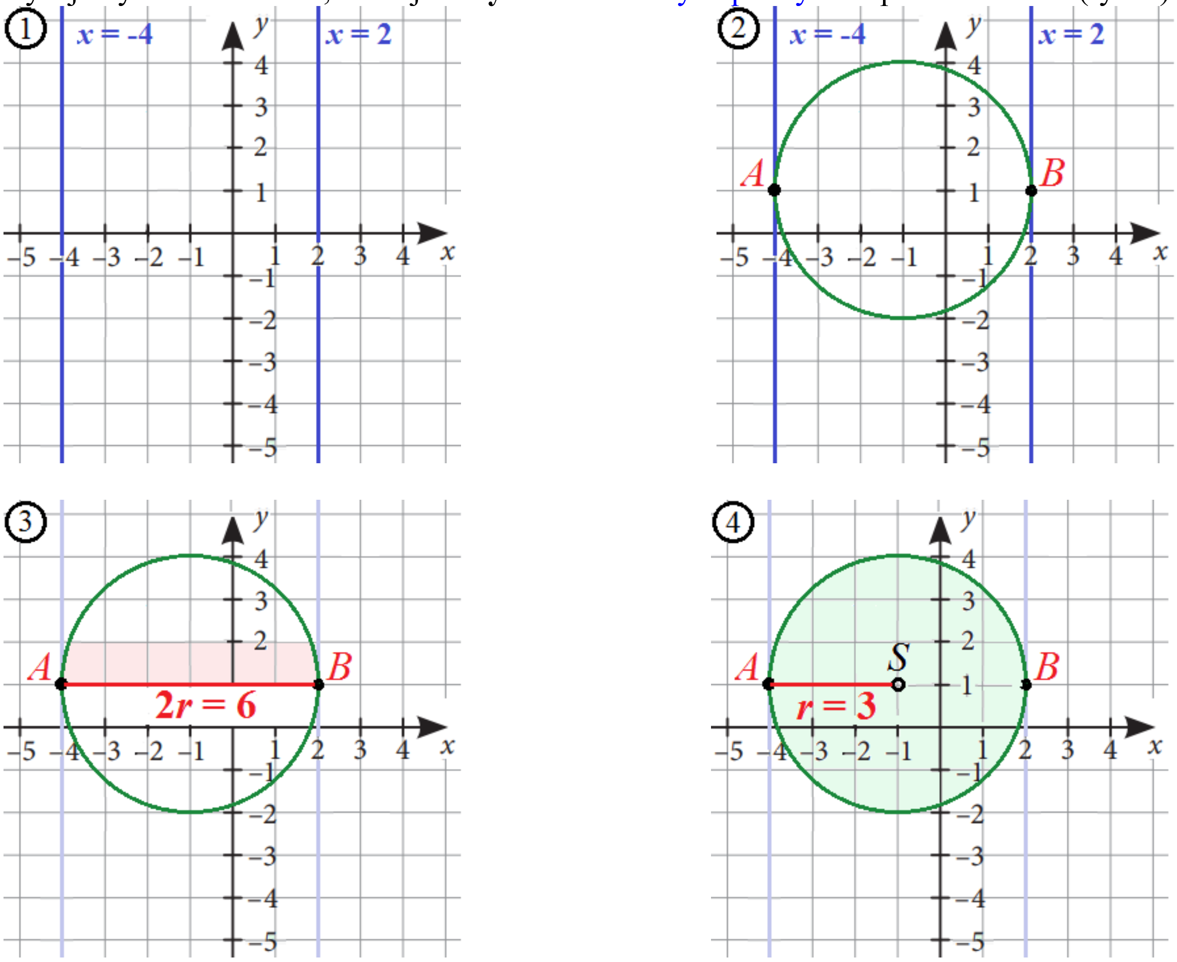


Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $r = 3$ (rys. 3).

Prosta o równaniu $y = 6$ jest **styczna do okręgu** (rys. 4), tym samym $m = 6$.

Odp. **A**

23.46.
W układzie współrzędnych rysujemy proste opisane równaniami $\boldsymbol{x = 2}$ i $\boldsymbol{x = -4}$ (rys. 1). Rysujemy **dowolne koło**, które jest **styczne** do obu tych prostych w punktach A i B (rys. 2).

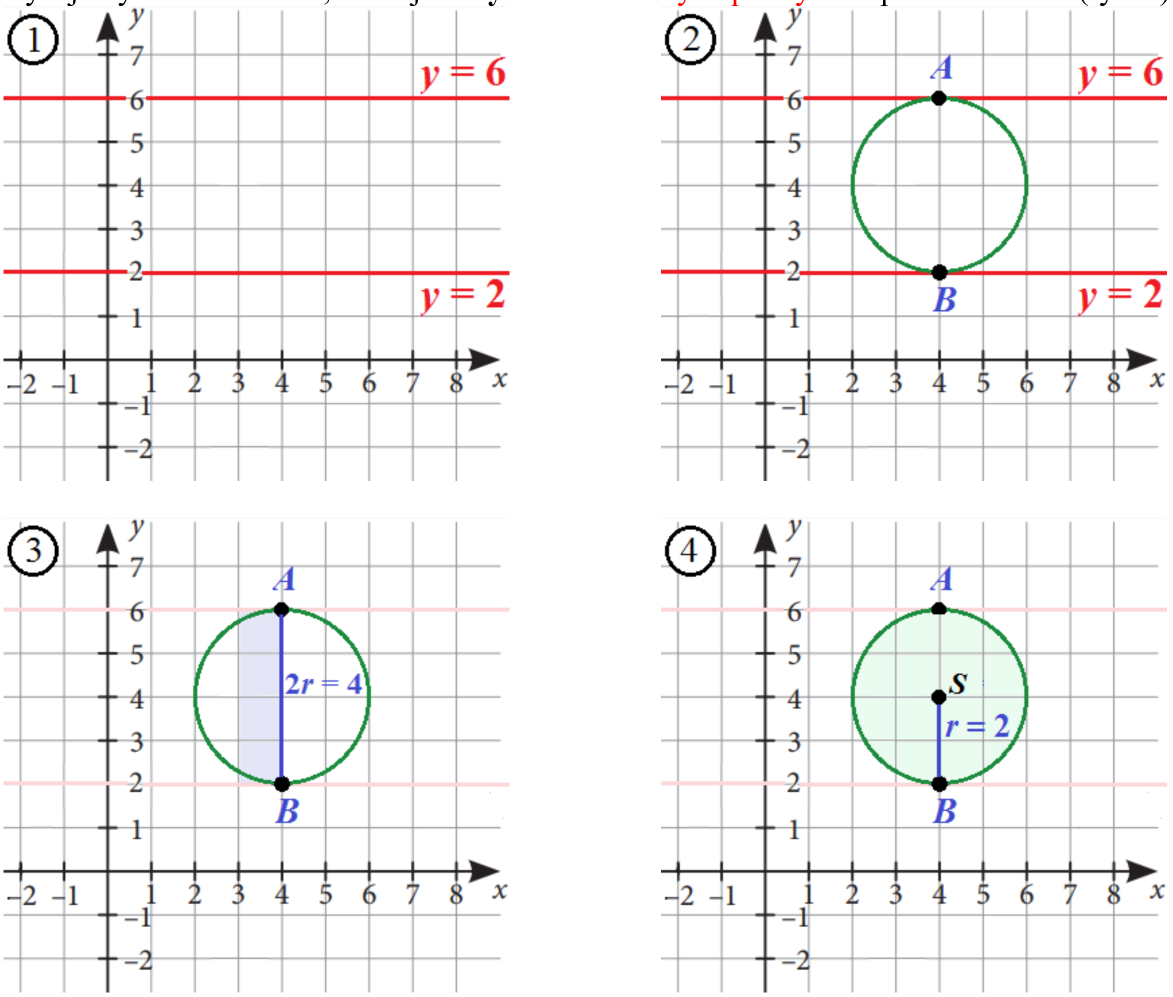


Odcinek AB jest średnicą koła. Odcinek AB rozciąga się na **6 kratek**, dlatego długość średnicy $\boldsymbol{2r = 6}$ (rys. 3), więc **promień koła** ma długość $\boldsymbol{r = 3}$ (rys. 4).

Dla $\boldsymbol{r = 3}$ obliczamy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem $P = \pi \cdot 3^2 = \boldsymbol{9\pi}$.

Odp. **C**

23.47.
W układzie współrzędnych rysujemy proste opisane równaniami $y = 2$ i $y = 6$ (rys. 1).
Rysujemy **dowolne koło**, które jest **styczne** do obu tych prostych w punktach A i B (rys. 2).

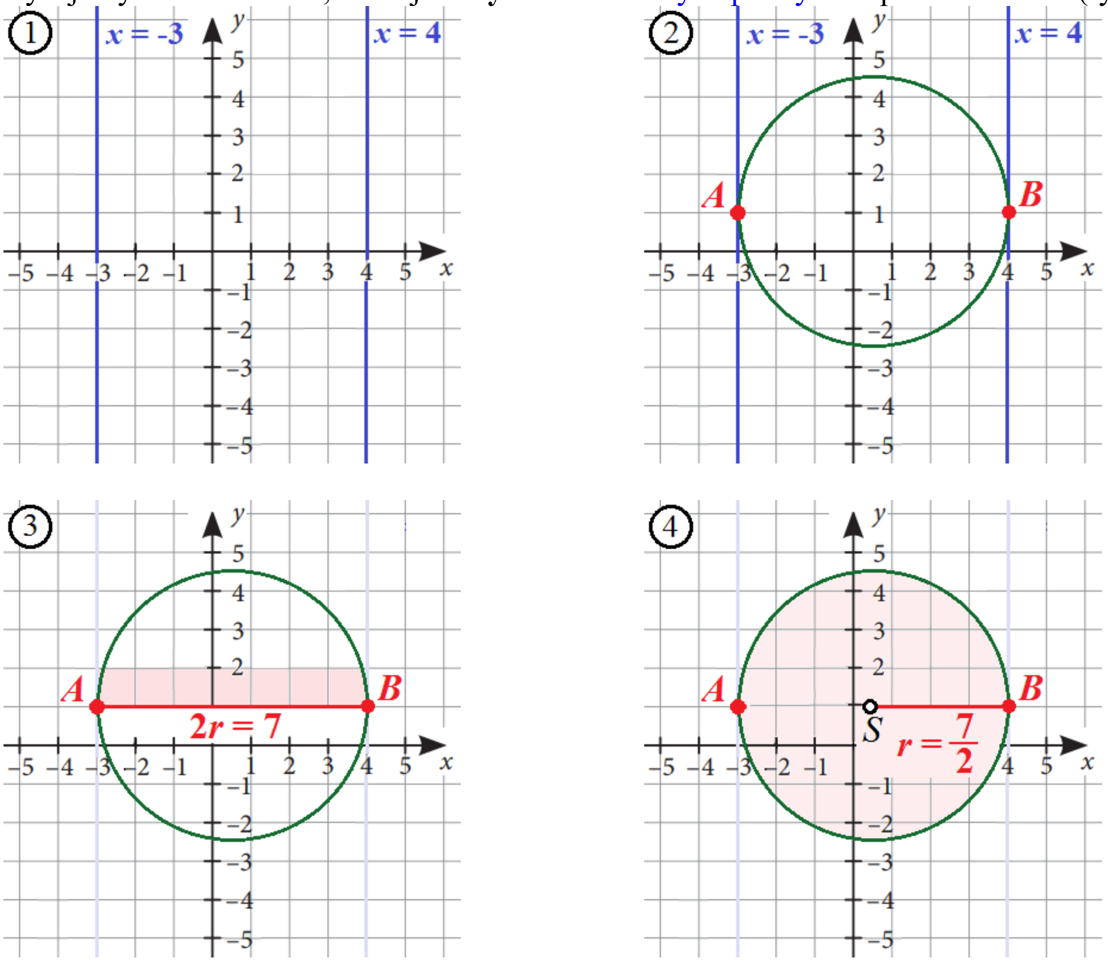


Odcinek AB jest średnicą koła. Odcinek AB rozciąga się na **4 kratki**, dlatego długość średnicy $\mathbf{2r = 6}$ (rys. 3), więc **promień koła** ma długość $\mathbf{r = 2}$ (rys. 4).

Dla $\mathbf{r = 2}$ obliczamy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem $P = \pi \cdot 2^2 = \mathbf{4}\pi$.

Odp. **A**

23.48.
W układzie współrzędnych rysujemy proste opisane równaniami $\boldsymbol{x = -3}$ i $\boldsymbol{x = 4}$ (rys. 1).
Rysujemy **dowolne koło**, które jest **styczne** do obu tych prostych w punktach A i B (rys. 2).

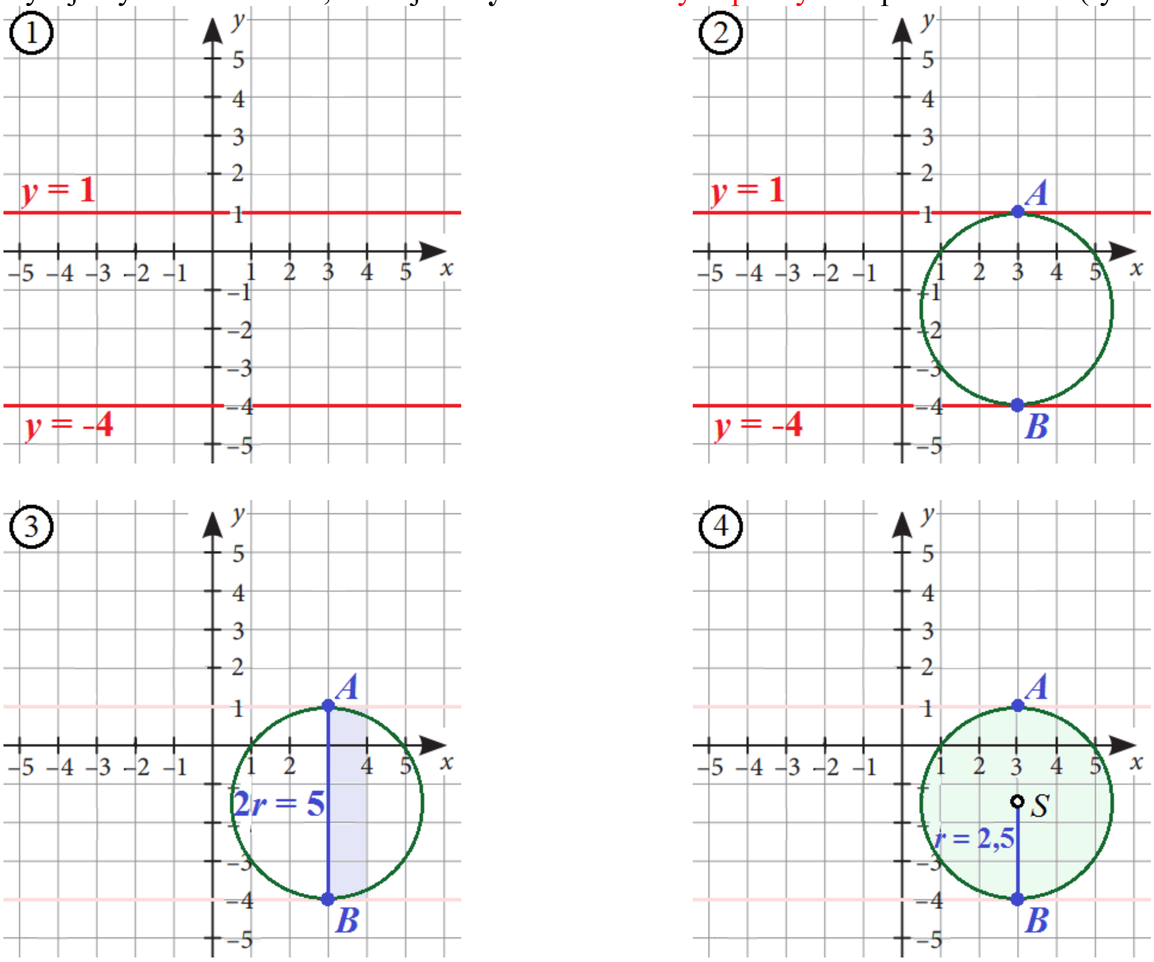


Odcinek AB jest średnicą koła. Odcinek AB rozciąga się na **7 kratek**, dlatego długość średnicy $\mathbf{2}\boldsymbol{r} = \mathbf{7}$ (rys. 3), więc **promień koła** ma długość $r = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ (rys. 4).

Dla $r = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ obliczamy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem $P = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{4}}\pi$.

Odp. **A**

23.49.
W układzie współrzędnych rysujemy proste opisane równaniami $y = 1$ i $y = -4$ (rys. 1).
Rysujemy **dowolne koło**, które jest **styczne** do obu tych prostych w punktach A i B (rys. 2).

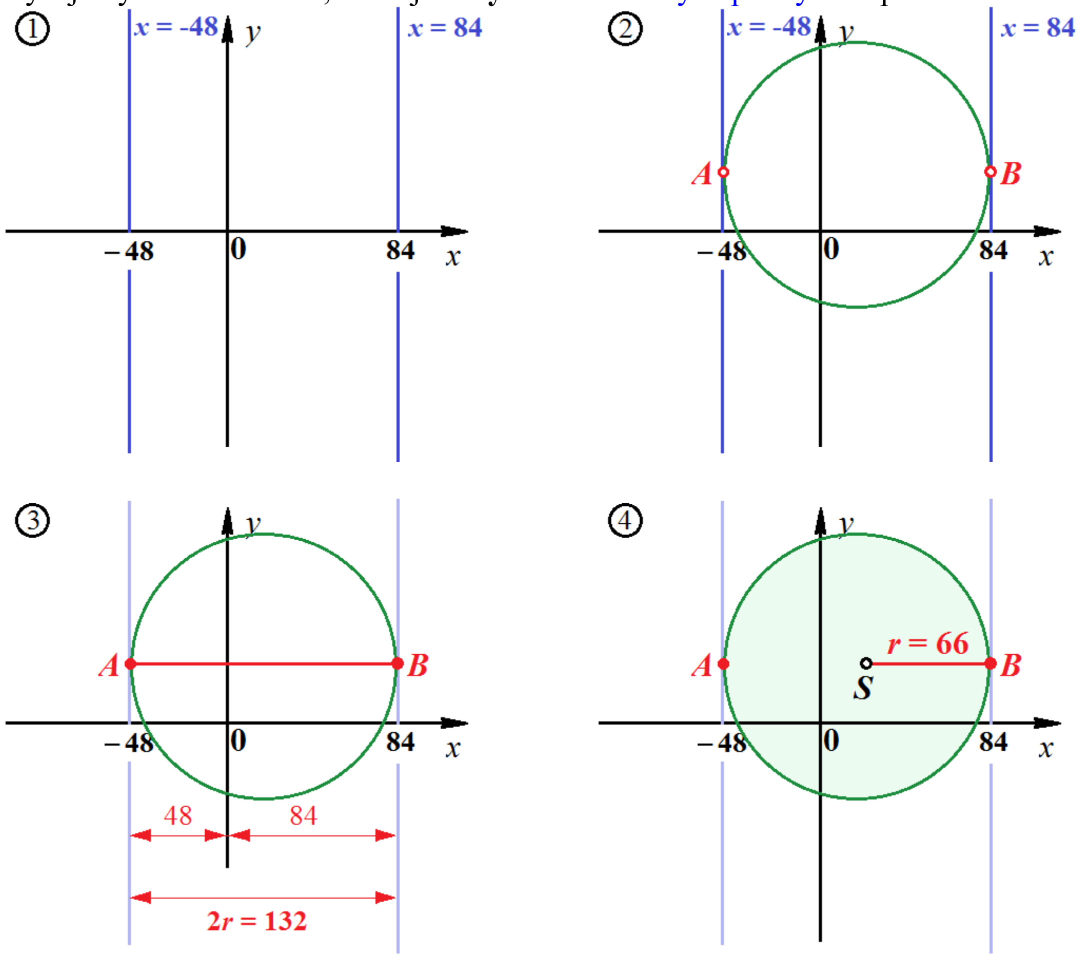


Odcinek AB jest średnicą koła. Odcinek AB rozciąga się na **5 kratek**, dlatego długość średnicy $2r = 5$ (rys. 3), więc **promień koła** ma długość $r = 2,5$ (rys. 4).

Dla $r = 2,5$ obliczamy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem $P = \pi \cdot 2,5^2 = \mathbf{6,25}\pi$.

Odp. **A**

23.50.
W układzie współrzędnych rysujemy proste opisane równaniami $x = -48$ i $x = 84$ (rys. 1).
Rysujemy **dowolne koło**, które jest **styczne** do obu tych prostych w punktach A i B (rys. 2).



Odcinek AB jest średnicą koła. Odcinek AB ma długość 48+84 = **132**, dlatego długość średnicy $\mathbf{2r = 132}$ (rys. 3), więc **promień koła** ma długość $r = 132 : 2 = \mathbf{66}$ (rys. 4).

Dla $r = 66$ obliczamy **pole koła** ze wzoru $P = \pi \cdot r^2$. Zatem $P = \pi \cdot 66^2 = \mathbf{4356\pi}$.

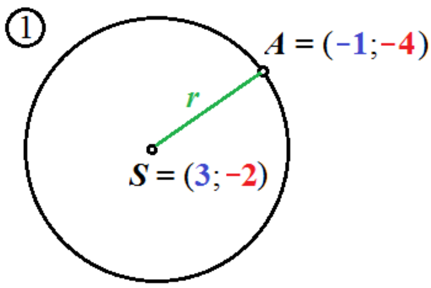
Odp. **C**

23.51.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).

Długość $|AS|$ jest równa długości promienia okręgu.



Obliczamy długość odcinka $|AS|$, o końcach w punktach $A = (-1; -4)$, $S = (3; -2)$.

Zasada obliczania długości odcinka:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (-1, -4)$, $S = (3, -2)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

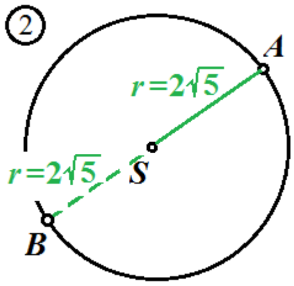
d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|AS| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-1-3)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4+2)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} =$$
$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$



Oznacza to, że promień okręgu ma długość $\boldsymbol{r} = 2\sqrt{5}$, więc średnica $\mathbf{2}\boldsymbol{r} = \mathbf{4\sqrt{5}}$ (rys. 2).

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Obliczamy w ten sam sposób co w Rozwiązaniu I, tylko w obliczeniach używamy przybliżeń pierwiastków $\sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}73}$, $\sqrt{5} \approx \mathbf{2{,}24}$ oraz $\sqrt{20} \approx \mathbf{4{,}47}$.

$|AS| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx \mathbf{4{,}47}$, więc przyjmujemy $r = 4{,}47$, tym samym średnica okręgu jest równa $2 \cdot 4{,}47 = \mathbf{8{,}94}$.

Sprawdzamy, która z proponowanych w odpowiedziach wartości liczbowych jest najbliższa rezultatowi **8,94**. Zatem:

A. $2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$

B. $2\sqrt{5} \approx 2 \cdot 2{,}24 = 4{,}48$

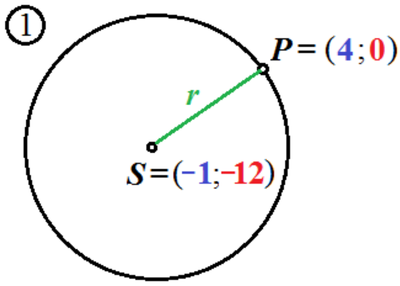
C. $4\sqrt{3} \approx 4 \cdot 1{,}73 = 6{,}92$

D. $4\sqrt{5} \approx 4 \cdot 2{,}24 = \mathbf{8{,}96}$.

Okazuje się, że wynik **8,96** jest najbliżej rezultatu **8,94**. Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

23.52.

Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).
Długość |***PS***| jest równa długości promienia okręgu.



Obliczamy długość odcinka $|PS|$, o końcach w punktach
$P = (\mathbf{4};\ \mathbf{0})$, $S = (\mathbf{-1};\ \mathbf{-12})$.

__**Zasada obliczania długości odcinka**__:
Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $P = (\mathbf{4},\ \mathbf{0})$, $S = (\mathbf{-1},\ \mathbf{-12})$.
a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,
b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
d) obliczamy wartość wyrażenia:

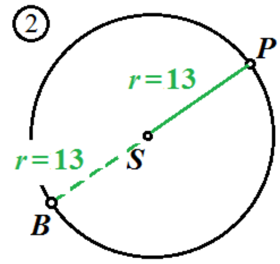
$$|PS| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|PS| = \sqrt{(4+1)^2 + (\quad)^2}$$

$$|PS| = \sqrt{(4+1)^2 + (0+12)^2}$$

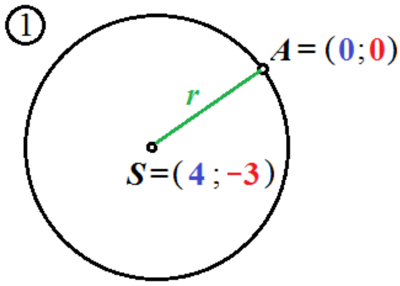
$$|PS| = \sqrt{(4+1)^2 + (0+12)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = \mathbf{13}$$

Oznacza to, że promień okręgu ma długość $r = 13$,
więc średnica $\boldsymbol{d} = \mathbf{26}$.



Odp. **D**

23.53.



Początek układu współrzędnych to punkt $A = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$.
Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).
Długość $|\boldsymbol{AS}|$ jest równa długości promienia okręgu.

Obliczamy długość odcinka $|AS|$, o końcach w punktach $A = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$, $S = (\mathbf{4}; \mathbf{-3})$.

__**Zasada obliczania długości odcinka**__:
Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $S = (\mathbf{4}, \mathbf{-3})$.
a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,
b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:
d) obliczamy wartość wyrażenia:

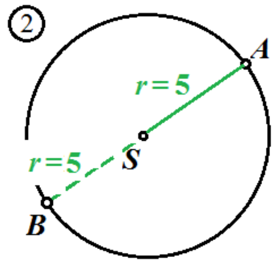
$$|AS| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(0-4)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(0-4)^2 + (0+3)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(0-4)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \mathbf{5}.$$

Oznacza to, że promień okręgu ma długość $r = 5$,
więc średnica $\boldsymbol{d} = \mathbf{10}$ (rys. 2).



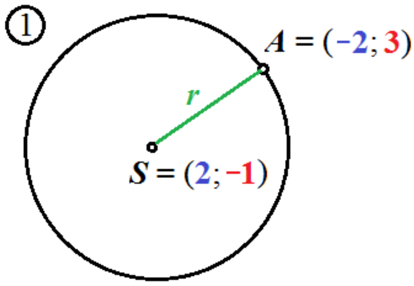
Odp. **D**

23.54.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).

Długość $|AS|$ jest równa długości promienia okręgu.



Obliczamy długość odcinka $|AS|$, o końcach w punktach $A = (-2;\ 3)$, $S = (2;\ -1)$.

Zasada obliczania długości odcinka:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (-2, 3)$, $S = (2, -1)$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{x}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne $\boldsymbol{y}$ obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

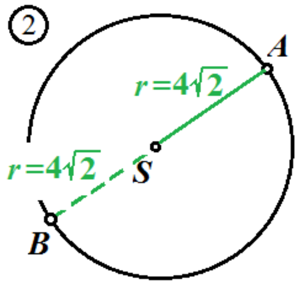
d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|AS| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-2-2)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+1)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} =$$
$$= \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}$$



Oznacza to, że promień okręgu ma długość $r = 4\sqrt{2}$, więc średnica $2r = \mathbf{8}\sqrt{\mathbf{2}}$ (rys. 2). Odrzucamy odpowiedzi B i C.

$$\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{2}} = \underbrace{\sqrt{64}}_{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{\mathbf{128}}\ .$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Obliczamy w ten sam sposób co w Rozwiązaniu I, tylko w obliczeniach używamy przybliżeń pierwiastków $\sqrt{8} \approx \mathbf{2{,}83}$, $\sqrt{128} \approx \mathbf{11{,}31}$ oraz $\sqrt{32} \approx \mathbf{5{,}66}$.

$|AS| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \approx \mathbf{5{,}66}$, więc przyjmujemy $r = 5{,}66$, tym samym średnica okręgu jest równa $2 \cdot 5{,}66 = \mathbf{11{,}32}$.

Sprawdzamy, która z proponowanych w odpowiedziach wartości liczbowych jest najbliższa rezultatowi **11,32**. Zatem:

A. $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ B. 4 C. 8 D. $\sqrt{128} \approx \mathbf{11{,}31}$.

Okazuje się, że wynik **11,31**, z odp. **D**, jest najbliżej rezultatu **11,32**.

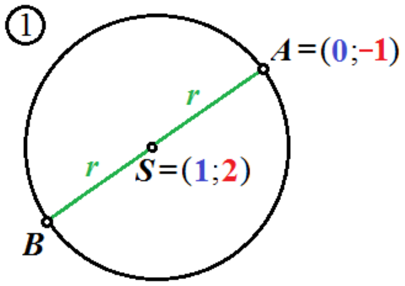
Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

23.55.

Rozwiązanie I:

Wykonujemy schematyczny rysunek (rys. 1).

Długość $|AS|$ jest równa długości promienia okręgu.



Obliczamy długość odcinka $|AS|$, o końcach w punktach $A = (\mathbf{0}; \mathbf{-1})$, $S = (\mathbf{1}; \mathbf{2})$.

__**Zasada obliczania długości odcinka**__:

Obliczymy długość odcinka o końcach w punktach o współrzędnych $A = (\mathbf{0}, \mathbf{-1})$, $S = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|AS| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

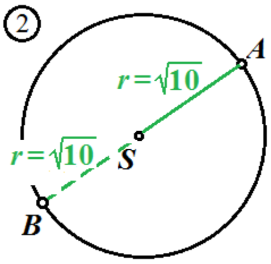
$$|AS| = \sqrt{(\,0 - 1\,)^2 + (\quad)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(\,0 - 1\,)^2 + (-1 - 2)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{\mathbf{10}}\,.$$

Oznacza to, że promień okręgu ma długość $r = \sqrt{10}$,

więc średnica $|AB| = \mathbf{2\sqrt{10}}$ (rys. 2).



Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Obliczamy w ten sam sposób co w Rozwiązaniu I, tylko w obliczeniach używamy przybliżeń pierwiastków $\sqrt{20} \approx \mathbf{4{,}47}$, $\sqrt{10} \approx \mathbf{3{,}16}$ oraz $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}41}$.

$|AS| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx \mathbf{3{,}16}$, więc przyjmujemy $r = 3{,}16$, tym samym średnica okręgu jest równa $2 \cdot 3{,}16 =$ **6,32**.

Sprawdzamy, która z proponowanych w odpowiedziach wartości liczbowych jest najbliższa rezultatowi **6,32**. Zatem:

A. $\sqrt{20} \approx 4{,}47$ B. $2\sqrt{10} \approx 2 \cdot 3{,}16 = \mathbf{6{,}32}$ C. $2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$ D. 2.

Okazuje się, że wynik **6,32** z odp. **B** pokrywa się z rezultatem wcześniej wykonanych obliczeń.

Oznacza to, że odp. **B** jest poprawna.

23.56.

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ → wypisujemy współczynnik, który jest przed $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

$-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \to \frac{3}{2} \to \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ → **zmiana** wypisanego współczynnika $\boldsymbol{a}$ na **przeciwny** i **odwrotny**

$y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x + \boldsymbol{b}$ → równanie szukanej prostej z uwzględnieniem **zmienionego** $\boldsymbol{a}$

(odrzucamy odpowiedzi B i D)

$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $P = (\mathbf{-3}, \mathbf{-1})$

$\mathbf{-1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot (\mathbf{-3}) + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{-3}$ oraz $\boldsymbol{y} = \mathbf{-1}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$-1 = -2 + \boldsymbol{b}$ → skracamy 3

$-1 + 2 = \boldsymbol{b}$

$\mathbf{1} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$ szukanej prostej

$y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x + \mathbf{1}$ → równanie szukanej prostej

Odp. **C**

23.57.

We wzorze $g(x)=3x-6$, czyli $\boldsymbol{y = 3x - 6}$ wykorzystujemy to, że $3=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$.

$y=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}x-6$ → równanie prostej która jest wykresem funkcji g

$y=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}x-6$ → wypisujemy współczynnik, który jest przed $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$

$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} \to -\frac{3}{1} \to -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ → **zmiana** wypisanego współczynnika ***a*** na **przeciwny** i **odwrotny**

$y=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x+\boldsymbol{b}$ → równanie szukanej prostej z uwzględnieniem **zmienionego *a***

(odrzucamy odpowiedzi C i D)

$\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $A = (\mathbf{4}, \mathbf{-2})$

$\mathbf{-2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{4}+\boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ oraz $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$-2=-\frac{4}{3}+b \quad |\cdot 3$

$\mathbf{3}\cdot(-2)=\mathbf{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\mathbf{3}\cdot b$

$-6=-4+3b$

$-6+4=3b$

$-2=3b \quad |:3$

$-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}=b$

$-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$ szukanej prostej

$y=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ → równanie szukanej prostej

Odp. **B**

23.58.

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ → wypisujemy współczynnik, który jest przed $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}=2$ → **zmiana** wypisanego współczynnika $\boldsymbol{a}$ na **przeciwny** i **odwrotny**

$\boldsymbol{y = 2x + b}$ → równanie szukanej prostej z uwzględnieniem **zmienionego** $\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $A = (\mathbf{-3}, \mathbf{-5})$

$\mathbf{-5} = \mathbf{2}\cdot(\mathbf{-3}) + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x = -3}$ oraz $\boldsymbol{y = -5}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$-5 = -6 + \boldsymbol{b}$

$-5 + 6 = \boldsymbol{b}$

$\mathbf{1} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$ szukanej prostej

Zatem $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$.

Odp. **A**

23.59.

Początek układu współrzędnych to punkt $A = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$.

Równanie $y = 3x - 5$ zapisujemy jako $\boldsymbol{y = \frac{3}{1}x - 5}$ (wykorzystujemy to, że $3 = \frac{3}{1}$).

$y = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}x - 5$ → wypisujemy współczynnik, który jest przed $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$

$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} \to -\frac{3}{1} \to -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ → **zmiana** wypisanego współczynnika $\boldsymbol{a}$ na **przeciwny** i **odwrotny**

$y = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x + \boldsymbol{b}$ → równanie szukanej prostej z uwzględnieniem **zmienionego** $\boldsymbol{a}$

(odrzucamy odpowiedzi C i D)

$\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $A = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

$\mathbf{0} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ oraz $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$0 = 0 + b$

$\mathbf{0} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$ szukanej prostej

$y = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x + \mathbf{0}$ → równanie szukanej prostej (prostszy zapis: $y = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x$).

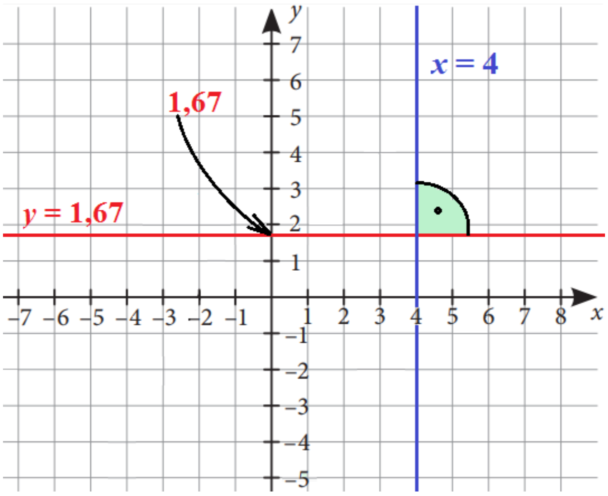
Odp. **A**

23.60.

Ponieważ $\frac{5}{3} \approx$ **1,67**, to w układzie współrzędnych rysujemy prostą ***y* = 1,67** czyli taką, żeby przechodziła przez współrzędną 1,67 na **osi *y***.

W odpowiedziach mamy prostą o równaniu ***x* = 4**, której wykres przechodzi przez współrzędną **4** na **osi *x***.

Proste ***y* = 1,67** oraz ***x* = 4** przecinają się pod kątem **prostym**. Stąd wynika, że te proste są **prostopadłe**.



Odp. **A**

23.61.

$y = 3x - 11$ → równanie prostej będącej wykresem funkcji f

$y = 3x + \boldsymbol{b}$ → szukany wzór funkcji g (proste **równoległe**, więc **3*x* bez zmian**)

$y = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $A = (2; -2)$

$\mathbf{-2} = \mathbf{3 \cdot 2} + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ oraz $\boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$-2 = 6 + \boldsymbol{b}$

$-2 - 6 = \boldsymbol{b}$

$\mathbf{-8} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{8}$ → szukany wzór funkcji g

Odp. **C**

23.62.
y* = 3*x* + *b → prosta **równoległa**, więc **3*x* bez zmian**

Wśród odpowiedzi, czynnik $\mathbf{3x}$ występuje tylko we wzorze $y = \mathbf{3x} + \frac{1}{3}$.

Odp. **C**

23.63.

$y = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}x + \boldsymbol{b}$ → wzór szukanej prostej (proste **równoległe**, więc $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}$ **bez zmian**)

$y = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $A = (\mathbf{-1}; \mathbf{1})$

$\mathbf{1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot (\mathbf{-1}) + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{-1}$ oraz $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$1 = -0{,}6 + \boldsymbol{b}$

$1 + 0{,}6 = \boldsymbol{b}$

$\mathbf{1{,}6} = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$

$y = \frac{3}{5}x + 1{,}6$ → wzór szukanej prostej

Ponieważ $\frac{8}{5} = 1{,}6$, to szukane równanie $y = \frac{3}{5}x + 1{,}6$ jest równoważne równaniu $y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$.

Odp. **A**

23.64.

$y = -x + 1$ → równanie prostej k

$y = -x + \boldsymbol{b}$ → szukany wzór prostej l (proste **równoległe**, więc **–*x* bez zmian**)

$y = -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ → uwzględniamy punkt $P = (\mathbf{2}; \mathbf{3})$

$\mathbf{3} = -\mathbf{2} + \boldsymbol{b}$ → wstawiamy $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ oraz $\boldsymbol{y} = -\mathbf{2}$; zajmujemy się wyliczeniem $\boldsymbol{b}$

$3 + 2 = \boldsymbol{b}$

$5 = \boldsymbol{b}$ → wyliczony współczynnik $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{y = -x + 5}$ → szukany wzór prostej l

Odp. **C**

23.65.

Warunek $f(-2) = 3$ jest równoważny temu, że punkt $A = (-2; 3)$ leży na wykresie funkcji f.

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ → równanie prostej k

$y = -\frac{3}{4}x + b$ → wzór funkcji f (proste równoległe, więc $-\frac{3}{4}$ bez zmian)

$y = -\frac{3}{4}x + b$ → uwzględniamy punkt $A = (-2; 3)$

$3 = -\frac{3}{4} \cdot (-2) + b$ → wstawiamy $y = 3$ oraz $x = -2$, wyliczamy b

$3 = -0{,}75 \cdot (-2) + b$ → uwzględniamy $\frac{3}{4} = 0{,}75$

$3 = 1{,}5 + b$

$3 - 1{,}5 = b$

$1{,}5 = b$ → wyliczona wartość współczynnika b

$y = -\frac{3}{4}x + 1{,}5$ → wzór funkcji f

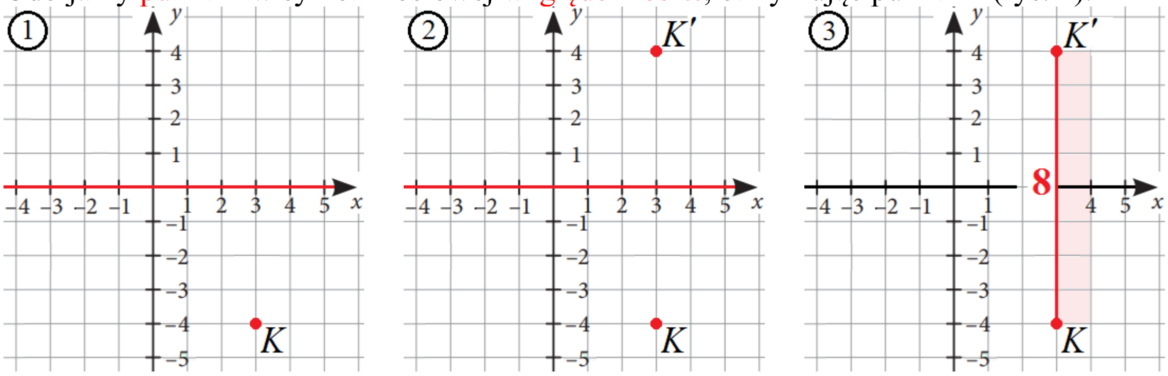
Ponieważ $\frac{3}{2} = 1{,}5$, to równanie $y = -\frac{3}{4}x + 1{,}5$ jest równoważne równaniu $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

Odp. **B**

23.66.

W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt *K* i zaznaczamy oś odbicia, czyli **oś *x*** (rys. 1).

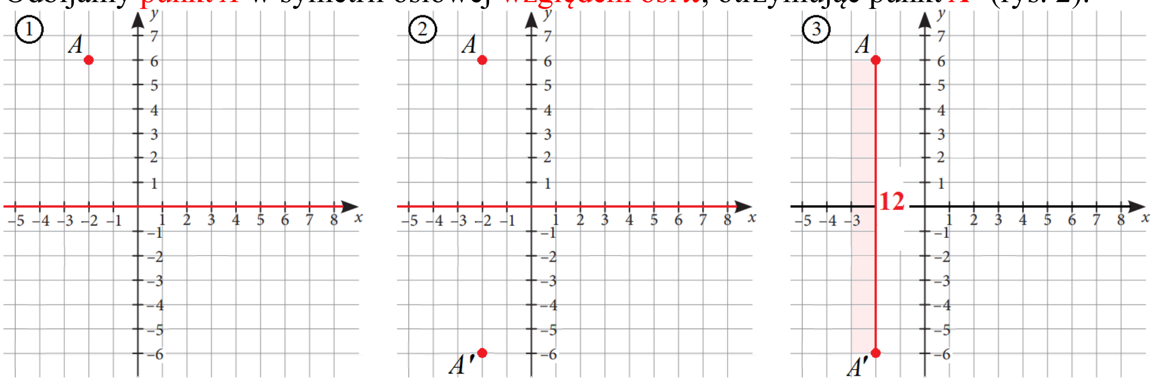
Odbijamy punkt *K* w symetrii osiowej względem osi ***x***, otrzymując punkt ***K'*** (rys. 2).



Z rys. 3 odczytujemy, że odcinek *KK'* rozciąga się na **osiem kratek**. Z tego powodu, szukana odległość wynosi **8**.

Odp. **C**

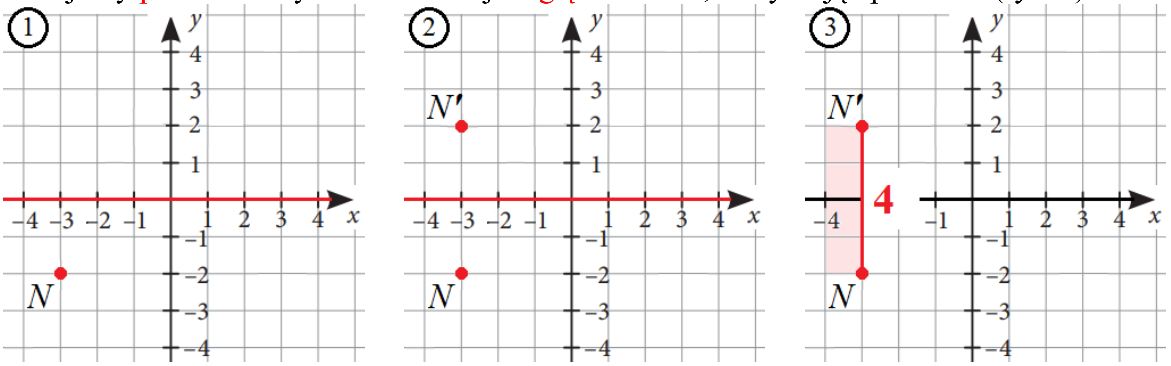
23.67.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt A i zaznaczamy oś odbicia, czyli **oś *x*** (rys. 1).
Odbijamy punkt A w symetrii osiowej względem osi ***x***, otrzymując punkt ***A'*** (rys. 2).



Z rys. 3 odczytujemy, że odcinek AA' rozciąga się na **dwanaście kratek**.
Z tego powodu, szukana odległość wynosi $|AA'| = \mathbf{12}$.

Odp. **D**

23.68.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt N i zaznaczamy oś odbicia, czyli **oś *x*** (rys. 1).
Odbijamy punkt N w symetrii osiowej względem osi ***x***, otrzymując punkt ***N'*** (rys. 2).



Z rys. 3 odczytujemy, że odcinek NN' rozciąga się na **cztery kratki**.
Z tego powodu, szukana odległość wynosi $|NN'| = \mathbf{4}$.

Odp. **A**

23.69.

Niech J' będzie obrazem punktu J w symetrii osiowej względem osi OX.

Zgodnie z informacjami podanymi w **karcie wzorów** (str. 6), jeśli dany punkt $J = (\mathbf{2017}; \mathbf{2018})$, to wówczas $J' = (\mathbf{2017}; \mathbf{-2018})$.

- Przekształcenia geometryczne
– przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a,b]$ przekształca punkt $A = (x,y)$ na punkt $A' = (x+a, y+b)$
– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x,y)$ na punkt $A' = (x,-y)$
– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x,y)$ na punkt $A' = (-x,y)$
– symetria względem punktu (a,b) przekształca punkt $A = (x,y)$ na punkt $A' = (2a-x, 2b-y)$
– jednokładność o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O = (x_0, y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A = (x,y)$ na punkt $A' = (sx + (1-s)x_0, sy + (1-s)y_0)$

Obliczamy szukaną odległość $|JJ'|$ dla $J = (\mathbf{2017}; \mathbf{2018})$ oraz $J' = (\mathbf{2017}; \mathbf{-2018})$.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|JJ'| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|JJ'| = \sqrt{(\mathbf{2017-2017})^2 + (\qquad)^2}$$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

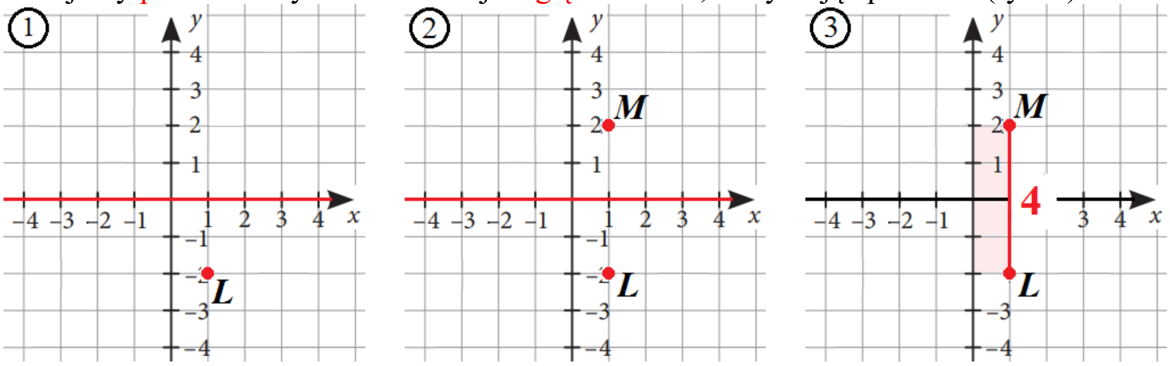
$$|JJ'| = \sqrt{(\mathbf{2017-2017})^2 + (\mathbf{2018+2018})^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia: $|JJ'| = \sqrt{(2017-2017)^2 + (2018+2018)^2} = \sqrt{0^2 + 4036^2} =$

$= \sqrt{0 + 4036^2} = \mathbf{4036}$.

Odp. **D**

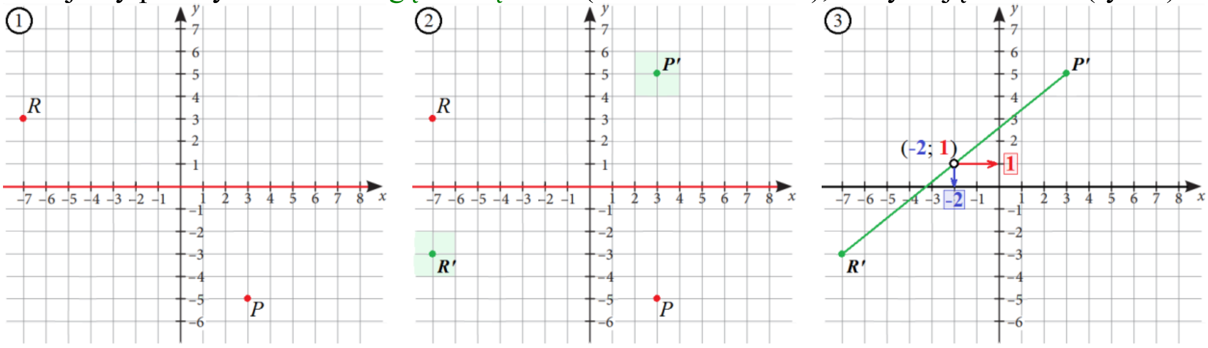
23.70.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt L i zaznaczamy oś odbicia, czyli **oś x** (rys. 1).
Odbijamy punkt L w symetrii osiowej względem osi x, otrzymując punkt M (rys. 2).



Z rys. 3 odczytujemy, że odcinek ML rozciąga się na **cztery kratki**.
Z tego powodu, szukana odległość wynosi $|ML| = \mathbf{4}$.

Odp. **D**

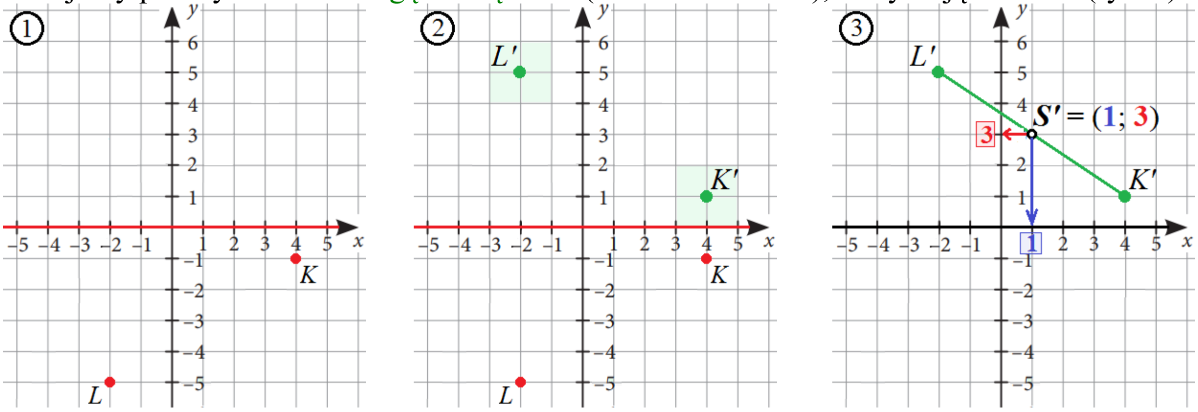
23.71.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dane punkty *P* i *R* oraz oś symetrii, czyli **oś *x*** (rys. 1).
Odbijamy punkty *P* i *R* na drugą stronę osi ***x*** (lustrzane odbicie), otrzymując ***P'*** i ***R'*** (rys. 2).



Łączymy punkty ***P'*** i ***R'***, tworząc odcinek *P'R'*. Znajdujemy jego **środek**, np. używając linijki. Odczytujemy współrzędne tego środka (**–2**; **1**) – tak, jak na rys. 3.

Odp. **B**

23.72.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dane punkty K i L oraz oś symetrii, czyli **oś x** (rys. 1).
Odbijamy punkty K i L na drugą stronę osi x (lustrzane odbicie), otrzymując ***K'*** i ***L'*** (rys. 2).

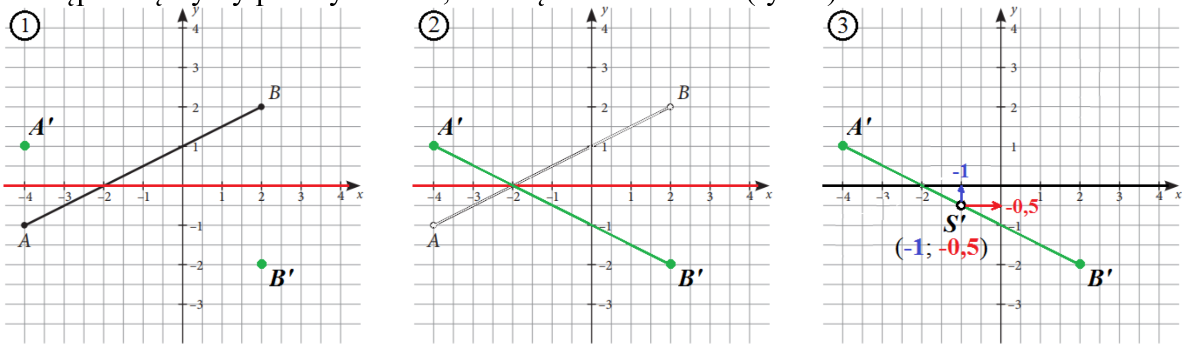


Łączymy punkty ***K'*** i ***L'***, tworząc odcinek $K'L'$. Znajdujemy jego **środek**, np. używając linijki. Odczytujemy współrzędne tego środka ***S'*** = (**1**; **3**) – tak, jak na rys. 3.

Odp. **A**

23.73.

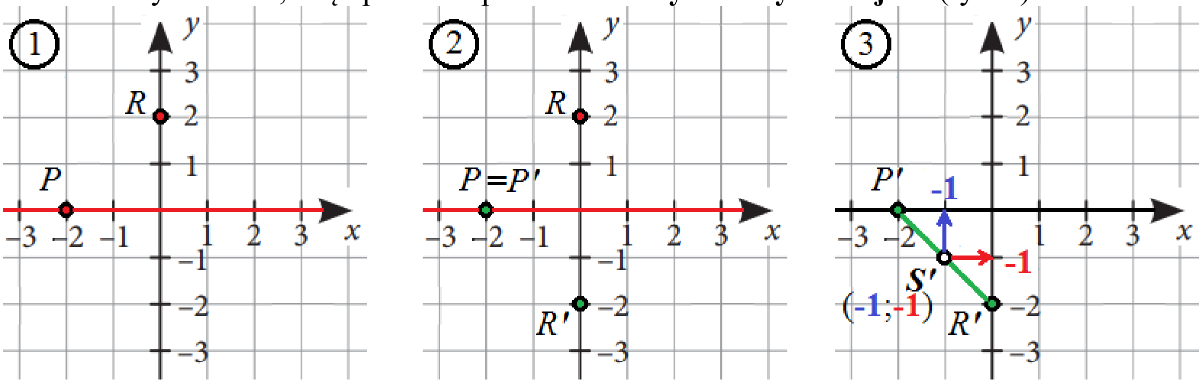
Odbijamy punkty *A* i *B* na drugą stronę osi ***x*** (lustrzane odbicie), otrzymując ***A'*** i ***B'*** (rys. 1). Następnie łączymy punkty ***A'*** i ***B'***, tworząc odcinek *A'B'* (rys. 2).



Znajdujemy **środek odcinka** ***A'B'***, np. używając linijki. Odczytujemy współrzędne tego środka ***S'*** = (**–1**; **–0,5**) – tak, jak na rys. 3.

Odp. **A**

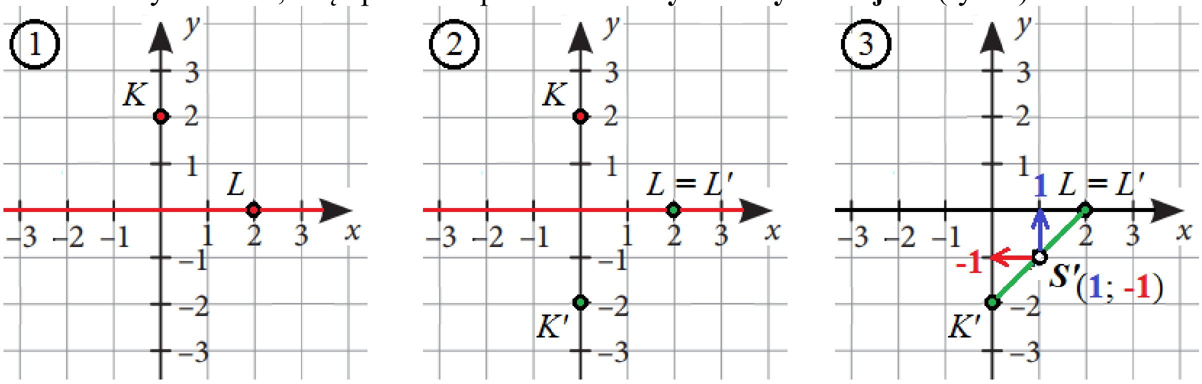
23.74.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dane punkty *P* i *R* oraz oś symetrii, czyli **oś *x*** (rys. 1).
Odbijamy punkt *R* na drugą stronę osi ***x*** (lustrzane odbicie), otrzymując ***R'***.
Punkt *P* leży **na osi *x***, więc punkt ***P'*** pozostanie **w tym samym miejscu** (rys. 2).



Łączymy punkty ***P'*** i ***R'***, tworząc odcinek *P'R'*. Znajdujemy jego **środek** i odczytujemy współrzędne tego środka (**–1**; **–1**) – tak, jak na rys. 3.

Odp. **D**

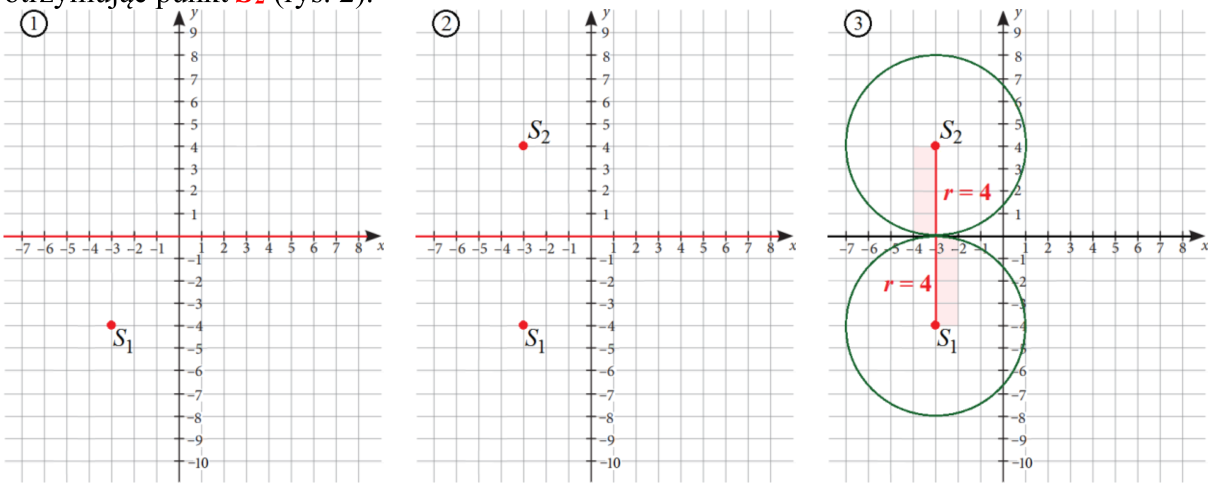
23.75.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dane punkty *K* i *L* oraz oś symetrii, czyli **oś *x*** (rys. 1).
Odbijamy punkt *K* na drugą stronę osi *x* (lustrzane odbicie), otrzymując ***K'***.
Punkt *L* leży **na osi *x***, więc punkt ***L'*** pozostanie **w tym samym miejscu** (rys. 2).



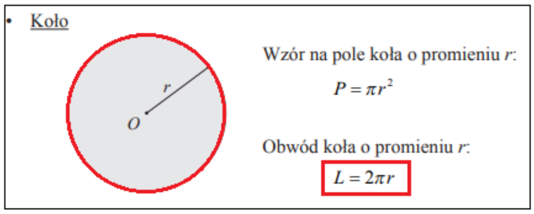
Łączymy punkty ***K'*** i ***L'***, tworząc odcinek *K'L'*. Znajdujemy jego **środek** i odczytujemy współrzędne tego środka ***S'*** = (**1**; **–1**) – tak, jak na rys. 3.

Odp. **B**

23.76.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt $\boldsymbol{S_1}$ oraz zaznaczamy oś odbicia, czyli (tutaj akurat) **oś *x*** (rys. 1). Odbijamy punkt $\boldsymbol{S_1}$ na drugą stronę osi *x* (odbicie lustrzane), otrzymując punkt $\boldsymbol{S_2}$ (rys. 2).



Okręgi symetryczne mają jednakowe promienie. Każdy z nich ma promień $\boldsymbol{r = 4}$ (rys. 3).

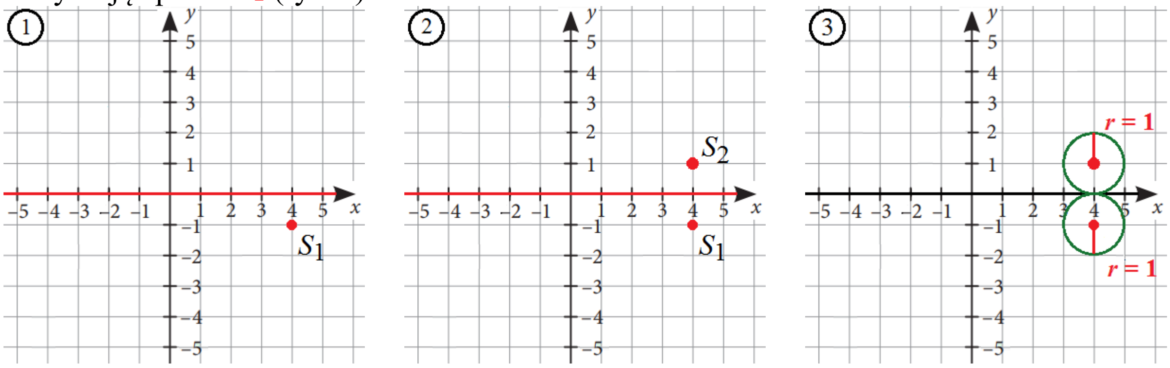


Obwód okręgu o promieniu $\boldsymbol{r = 4}$ liczymy ze wzoru $L = 2\pi \cdot r$ (**karta wzorów**, str. 10).

$L = 2\pi \cdot 4 = \mathbf{8}\pi$.

Odp. **D**

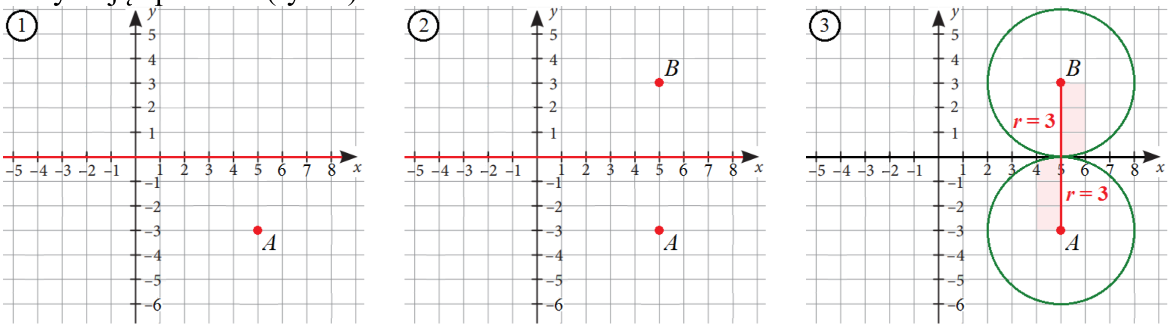
23.77.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt S_1 oraz zaznaczamy oś odbicia, czyli (tutaj akurat) **oś *x*** (rys. 1). Odbijamy punkt S_1 na drugą stronę osi x (odbicie lustrzane), otrzymując punkt S_2 (rys. 2).



Okręgi symetryczne mają jednakowe promienie. Każdy z nich ma promień $r = 1$ (rys. 3).

Odp. **A**

23.78.
W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt ***A*** oraz zaznaczamy oś odbicia, czyli (tutaj akurat) **oś *x*** (rys. 1). Odbijamy punkt ***A*** na drugą stronę osi *x* (odbicie lustrzane), otrzymując punkt ***B*** (rys. 2).

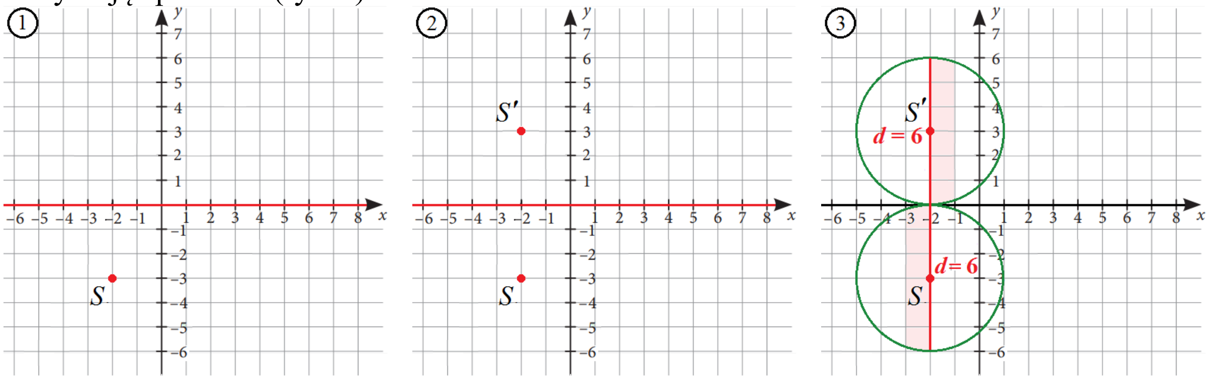


Okręgi symetryczne mają jednakowe promienie. Każdy z nich ma promień $\boldsymbol{r = 3}$ (rys. 3).

Odp. **C**

23.79.

W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt ***S*** oraz zaznaczamy oś odbicia, czyli (tutaj akurat) **oś *x*** (rys. 1). Odbijamy punkt ***S*** na drugą stronę osi *x* (odbicie lustrzane), otrzymując punkt ***S'*** (rys. 2).

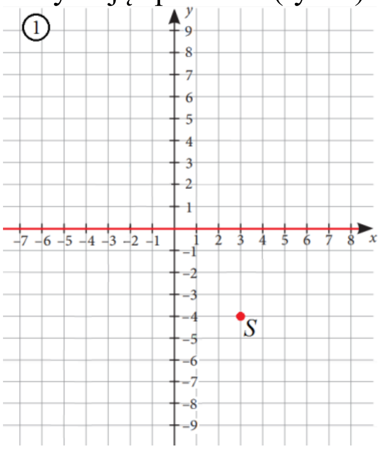


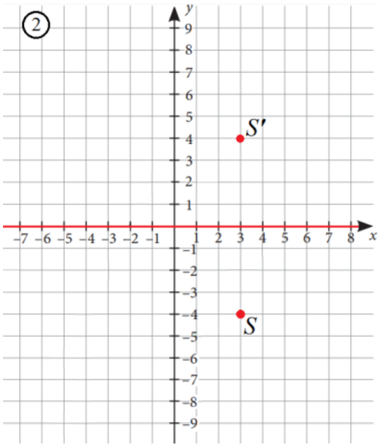
Okręgi symetryczne mają jednakowe promienie, więc mają też jednakowe średnice. Każdy z nich ma średnicę ***d* = 6** (rys. 3).

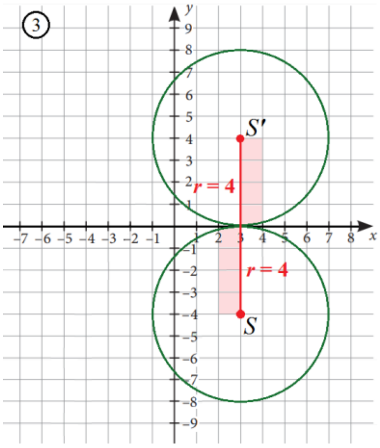
Odp. **D**

23.80.

W układzie współrzędnych umieszczamy dany punkt ***S*** oraz zaznaczamy oś odbicia, czyli (tutaj akurat) **oś *x*** (rys. 1). Odbijamy punkt ***S*** na drugą stronę osi *x* (odbicie lustrzane), otrzymując punkt ***S’*** (rys. 2).



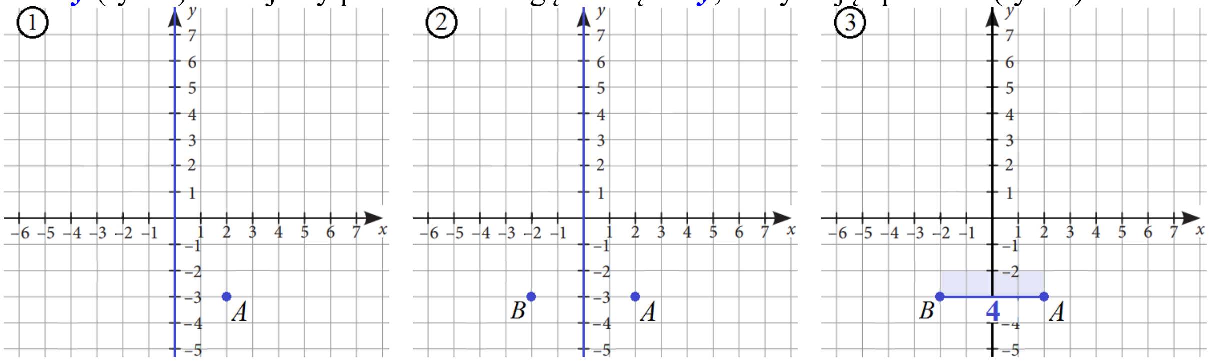




Okręgi symetryczne mają jednakowe promienie. Każdy z nich ma promień ***r* = 4** (rys. 3).

Odp. **B**

23.81.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dany punkt ***A*** oraz oś symetrii – w tym zadaniu jest to **oś *y*** (rys. 1). Odbijamy punkt A na drugą stronę **osi *y***, otrzymując punkt ***B*** (rys. 2).

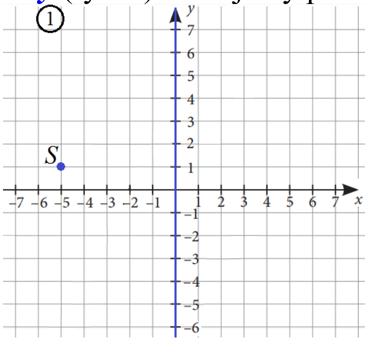


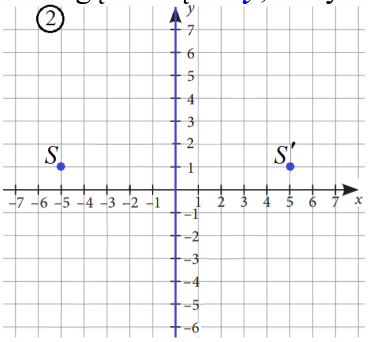
Łączymy punkty A i B. Otrzymujemy odcinek AB, który rozciąga się na **cztery kratki**, dlatego długość $|AB| = \mathbf{4}$ (rys. 3).

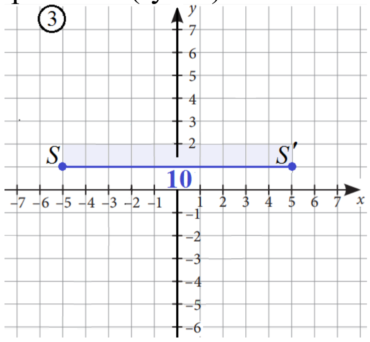
Odp. **C**

23.82.

W układzie współrzędnych zaznaczamy dany punkt ***S*** oraz oś symetrii – w tym zadaniu jest to **oś *y*** (rys. 1). Odbijamy punkt *S* na drugą stronę **osi *y***, otrzymując punkt ***S’*** (rys. 2).



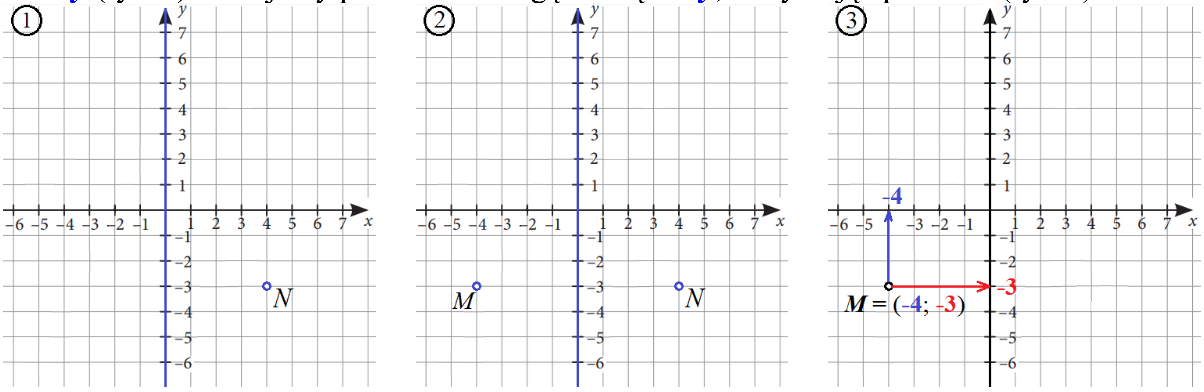




Łączymy punkty ***S*** i ***S’***. Otrzymujemy odcinek ***SS’***, który rozciąga się na **dziesięć kratek**, dlatego szukana odległość między punktem ***S*** a punktem ***S’*** jest równa **10** (rys. 3).

Odp. **D**

23.83.
W układzie współrzędnych zaznaczamy dany punkt N oraz oś symetrii – w tym zadaniu jest to **oś y** (rys. 1). Odbijamy punkt N na drugą stronę **osi y**, otrzymując punkt M (rys. 2).

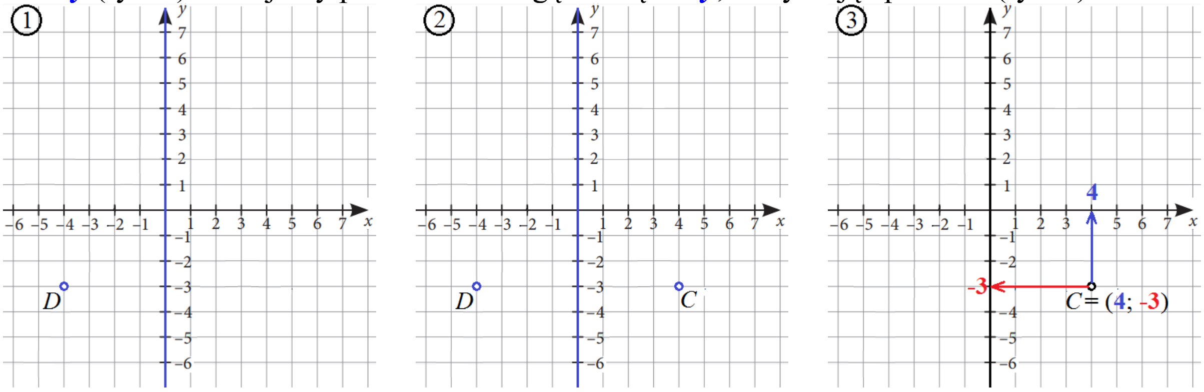


Odczytujemy współrzędne punktu M, więc $M = (-4; -3)$ – tak jak na rys. 3.

Odp. **B**

23.84.

W układzie współrzędnych zaznaczamy dany punkt ***D*** oraz oś symetrii – w tym zadaniu jest to **oś *y*** (rys. 1). Odbijamy punkt *D* na drugą stronę **osi *y***, otrzymując punkt ***C*** (rys. 2).



Odczytujemy współrzędne punktu $\boldsymbol{C} = (x_C; y_C)$, więc $\boldsymbol{C} = (\mathbf{4}; \mathbf{-3})$ – tak jak na rys. 3.

Oznacza to, że $x_C = \mathbf{4}$ oraz $y_C = \mathbf{-3}$.

Odp. **C**

23.85.

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6). Wg zasady symetrii względem osi *y*, współrzędną ***x*** należy **zmienić na przeciwną**, zaś ***y*** zostaje **bez zmian**.

- Przekształcenia geometryczne

– przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$
– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$
– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$
– symetria względem punktu (a,b) przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(2a-x,2b-y)$
– jednokładność o środku w punkcie O i skali $s\neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'}=s\cdot\overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O=(x_0,y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx+(1-s)x_0, sy+(1-s)y_0)$

Oznacza to, że jeśli ***R*** = (**2017**, **–7102**), to ***P*** = (**–2017**, **–7102**).

Obliczamy szukaną długość |***PR’***| dla ***P*** = (**–2017**, **–7102**) oraz ***R*** = (**2017**, **–7102**).

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|PR| = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|PR| = \sqrt{(2017+2017)^2 + (\qquad)^2}$$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|PR| = \sqrt{(2017+2017)^2 + (-7102+7102)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$|PR| = \sqrt{(2017+2017)^2 + (-7102+7102)^2} = \sqrt{4034^2 + 0^2} =$ **4034**, więc ***d*** **= 4034**.

Odp. **A**

23.86.

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6).

- Przekształcenia geometryczne

– przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$
– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$
– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$
– symetria względem punktu $(\overset{0}{a},\overset{0}{b})$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(\overset{0-x}{2a-x},\overset{0-y}{2b-y})$
– jednokładność o środku w punkcie O i skali $s\neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'}=s\cdot\overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O=(x_0,y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx+(1-s)x_0, sy+(1-s)y_0)$

Wg informacji zawartych w tej karcie, symetria względem punktu (**0**; **0**) powoduje **zmianę obu współrzędnych** punktu na **przeciwne**.

Zatem jeśli ***A*** = (**4**; **–6**), to punkt ***B*** = (**–4**; **6**). Obliczamy długość |***AB***|.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|AB|=\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AB|=\sqrt{(4+4)^2+(\quad)^2}$$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|AB|=\sqrt{(4+4)^2+(-6-6)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|AB|=\sqrt{(4+4)^2+(-6-6)^2}=\sqrt{8^2+(-12)^2}=\sqrt{64+144}=\sqrt{208}.$$

208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	

Poprzez rozkład liczby **208** na czynniki pierwsze, otrzymujemy wynik $|AB|=\sqrt{208}=\mathbf{4\sqrt{13}}$.

Odp. **C**

Rozwiązanie II:
Stosujemy ten sam sposób co w Rozwiązaniu I, tylko używamy przybliżeń pierwiastków $\sqrt{5}\approx\mathbf{2{,}24}$, $\sqrt{13}\approx\mathbf{3{,}61}$, $\sqrt{208}\approx\mathbf{14{,}42}$.

$$|AB|=\sqrt{(4+4)^2+(-6-6)^2}=\sqrt{8^2+(-12)^2}=\sqrt{64+144}=\sqrt{208}\approx\mathbf{14{,}42}.$$

Sprawdzamy, która z liczb podanych w odpowiedziach jest **najbliżej** rezultatu **14,42**. Zatem:

A. $4\sqrt{5}\approx 4\cdot 2{,}24=8{,}96$ B. $8\sqrt{5}\approx 8\cdot 2{,}24=17{,}92$

C. $4\sqrt{13}\approx 4\cdot 3{,}61=\mathbf{14{,}44}$ D. $8\sqrt{13}\approx 8\cdot 3{,}61=28{,}88$

Wyraźnie widać, że wynik **14,44** z odp. **C** jest najbliżej rezultatu **14,42**.
Oznacza to, że odp. **C** jest poprawna.

23.87.

Rozwiązanie I:

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6).

- <u>Przekształcenia geometryczne</u>

– przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$

– symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$

– symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$

– symetria względem punktu $(\overset{0}{a},\overset{0}{b})$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(\overset{0-x}{2a-x},\overset{0-y}{2b-y})$

– jednokładność o środku w punkcie O i skali $s\neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'}=s\cdot\overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O=(x_0,y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx+(1-s)x_0,sy+(1-s)y_0)$

Wg informacji zawartych w tej karcie, symetria względem punktu (**0**; **0**) powoduje **zmianę obu współrzędnych** punktu na **przeciwne**.

Zatem jeśli ***E*** = (**–2**; **–4**), to jego obraz ***E'*** = (**2**; **4**). Obliczamy długość |***E*E'**|.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|EE'|=\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|EE'|=\sqrt{(-2-2)^2+(\quad)^2}$$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|EE'|=\sqrt{(-2-2)^2+(-4-4)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|EE'|=\sqrt{(-2-2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}.$$

$$\begin{array}{r|l}
80 & 2 \\
40 & 2 \\
20 & 2 \\
10 & 2 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\mathbf{2} \\
\mathbf{2}
\end{array}$$

Poprzez rozkład liczby **80** na czynniki pierwsze, otrzymujemy wynik $|EE'|=\sqrt{80}=\mathbf{4\sqrt{5}}$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Stosujemy ten sam sposób co w Rozwiązaniu I, tylko używamy przybliżeń pierwiastków $\sqrt{5}\approx\mathbf{2{,}24}$, $\sqrt{13}\approx\mathbf{3{,}61}$, $\sqrt{80}\approx\mathbf{8{,}94}$.

$$|EE'|=\sqrt{(-2-2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}\approx\mathbf{8{,}94}.$$

Sprawdzamy, która z liczb podanych w odpowiedziach jest **najbliżej** rezultatu **8,94**.

Zatem:

A. $4\sqrt{5}\approx 4\cdot 2{,}24=\mathbf{8{,}96}$ B. $8\sqrt{5}\approx 8\cdot 2{,}24=17{,}92$

C. $4\sqrt{13}\approx 4\cdot 3{,}61=14{,}44$ D. $8\sqrt{13}\approx 8\cdot 3{,}61=28{,}88$

Wyraźnie widać, że wynik **8,96** z odp. **A** jest najbliżej rezultatu **8,94**.
Oznacza to, że odp. **A** jest poprawna.

23.88.

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6).

- Przekształcenia geometryczne
  - przesunięcie o wektor $\vec{u}=[a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$
  - symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$
  - symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$
  - symetria względem punktu $(\overset{0}{a},\overset{0}{b})$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(\overset{0-x}{2a-x},\overset{0-y}{2b-y})$
  - jednokładność o środku w punkcie O i skali $s\neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'}=s\cdot\overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O=(x_0,y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx+(1-s)x_0,sy+(1-s)y_0)$

Wg informacji zawartych w tej karcie, symetria względem punktu (**0**; **0**) powoduje **zmianę obu współrzędnych** punktu na **przeciwne**.

Zatem jeśli ***P*** = (**–4**; **3**), to punkt ***R*** = (**4**; **–3**). Obliczamy długość |***PR***|.

a) pod pierwiastkiem mamy **sumę kwadratów** dwóch wyrażeń,

$$|PR| = \sqrt{(\qquad)^2+(\qquad)^2}$$

b) do pierwszego nawiasu wpisujemy współrzędne ***x*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|PR| = \sqrt{(-4-4)^2+(\qquad)^2}$$

c) do drugiego nawiasu wpisujemy współrzędne ***y*** obu punktów: **jedną normalnie**, a **drugą** z **przeciwnym znakiem**:

$$|PR| = \sqrt{(-4-4)^2+(3+3)^2}$$

d) obliczamy wartość wyrażenia:

$$|PR| = \sqrt{(-4-4)^2+(3+3)^2} = \sqrt{(-8)^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \mathbf{10}.$$

Odp. **D**

23.89.

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6).

- Przekształcenia geometryczne
  - przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$
  - symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$
  - symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$
  - symetria względem punktu $(\overset{0}{a}, \overset{0}{b})$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (\overset{0\,-x}{2a - x}, \overset{0\,-y}{2b - y})$
  - jednokładność o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O = (x_0, y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx + (1 - s)x_0, sy + (1 - s)y_0)$

Wg informacji zawartych w tej karcie, symetria względem punktu (**0**; **0**) powoduje **zmianę obu współrzędnych** punktu na **przeciwne**.

Zatem jeśli ***P*** = (–**2**; **1**), to punkt ***R* =** (**2**; **–1**).

Odp. **B**

23.90.

Początek układu współrzędnych to punkt (**0**; **0**).

Korzystamy z **karty wzorów** (str. 6).

- Przekształcenia geometryczne
- – przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$
- – symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$
- – symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$
- – symetria względem punktu $(\overset{0}{a}, \overset{0}{b})$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (\overset{0\,-x}{2a - x}, \overset{0\,-y}{2b - y})$
- – jednokładność o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O = (x_0, y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx + (1 - s)x_0, sy + (1 - s)y_0)$

Wg informacji zawartych w tej karcie, symetria względem punktu (**0**; **0**) powoduje **zmianę obu współrzędnych** punktu na **przeciwne**.

Zatem jeśli $\boldsymbol{A}$ = (**2017**; **–2018**), to punkt $\boldsymbol{P}$ **=** (**–2017**; **2018**).

Odp. **B**