29.1.
Wypisujemy liczby spełniające warunek zadania:

110000	11000	1100	110	11	2
101000	10100	1010	101		20
100100	10010	1001			200
100010	10001				2000
100001					20000
					200000

Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest **21**.

Odp. **B**

29.2.
Wypisujemy wszystkie liczby 10-cyfrowe, spełniające warunki zadania.

Jest ich **10**.

Odp. **B**

2000000000

1100000000
1010000000
1001000000
1000100000
1000010000
1000001000
1000000100
1000000010
1000000001

29.3.

Wypisujemy liczby spełniające warunki zadania.

3	2+1	1+1+1
3000	1002	1011
	1020	1101
	1200	1110
	2001	
	2010	
	2100	

Jest ich **10**.

Odp. **C**

29.4.

Wypisujemy liczby spełniające warunki zadania.

20000000

11000000
10100000
10010000
10001000
10000100
10000010
10000001

Jest ich **8**.

Odp. **A**

29.5.

Liczby, o które chodzi w zadaniu, mogą się zaczynać jedynką i na jednej z pozostałych **99 pozycji** muszą mieć drugą jedynkę. Resztę pozycji uzupełniamy zerami.

Te liczby mają postać $1\underbrace{\_\,\_\,\_\ldots\_}_{99\ pozycji}$, tzn. zaczynają się jedynką, a drugą jedynkę można w nich umieścić na **99 sposobów**. Zatem mamy **99** tego typu **liczb**.

Do tego dochodzi liczba $2\underbrace{000\ldots0}_{99\ zer}$.

Razem mamy 99 + 1 = **100** liczb spełniających warunki zadania.

Odp. **C**

29.6.
Wypisujemy liczby naturalne dodatnie podzielne przez 6 mniejsze od 100:
6, 12, **18**, 24, 30, **36**, 42, 48, **54**, 60, 66, **72**, 78, 84, **90**, 96. Łącznie mamy **16 liczb**.

Wypisujemy liczby naturalne dodatnie podzielne przez 9 mniejsze od 100:
9, **18**, 27, **36**, 45, **54**, 63, **72**, 81, **90**, 99. W tym przypadku mamy razem **11 liczb**.

Liczby zaznaczone na czerwono powtarzają się w obu zestawach liczbowych.
Jest **5** takich **liczb**. Należy je odjąć, bo samo dodawanie **16** + **11** spowoduje dwukrotne ich je dwukrotnie.

Ostatecznie, mamy **16** + **11** – **5** = **22** liczby spełniające warunki zadania.

Odp. **B**

29.7.
Liczby podzielne przez **2** to liczby **parzyste**.
Cyfrę dziesiątek wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**)
Liczba parzysta musi być zakończona **0**, **2**, **4**, **6** lub **8** (na **5 sposobów**).
Z reguły mnożenia, liczb 2-cyfrowych podzielnych przez 2 jest **9·5** = **45**.

$$\underbrace{\text{1 - 9}}_{9} \cdot \underbrace{\text{0, 2, 4, 6, 8}}_{5} = 45$$

Liczby 2-cyfrowe podzielne przez 10 to: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.
Każda z nich jest zakończona zerem, a takie liczby policzono już wcześniej.
Oznacza to, że już **nie ingerujemy** w otrzymany wcześniej wynik **45**.

Odp. **D**

29.8.
Słowo „i” z treści zadania powoduje, że na początku trzeba znaleźć **najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW)** liczb **4** i **6**, np. tak:
4, 8, **12**, 16, 20, 24, ... → wielokrotności liczby **4**
6, **12**, 18, 24, 30, ... → wielokrotności liczby **6**
Szukamy **najmniejszej liczby**, która się powtarza w obu zestawach liczbowych.
Taką liczbą jest **12**.

Wypisujemy wszystkie liczby 2-cyfrowe podzielne **przez 12**:
12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 → łącznie **8 liczb**.

Odp. **A**

29.9.
Liczby podzielne przez 5 mogą kończyć się zerem lub piątką.
Jednak jeśli liczba kończy się piątką, nie jest parzysta.
Zatem **liczba** musi **kończyć się zerem**.
Wypisujemy wszystkie liczby naturalne dodatnie z zerem na końcu, mniejsze od 150:
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140. Łącznie mamy **14 liczb**.

Odp. **A**

29.10.
Rozwiązanie I:
Wyliczamy najpierw, ile jest wszystkich liczb naturalnych 2-cyfrowych:

$$\overbrace{9}^{1-9} \cdot \overbrace{10}^{0-9} = 90$$

Cyfrę dziesiątek wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).
Cyfrę jedności wybieramy dowolną od **1** do **9** oraz do tego dochodzi **zero** (na **10 sposobów**).
Zgodnie z regułą mnożenia, mamy **9**·**10** = 90 liczb.
Co trzecia z nich jest podzielna przez 3, więc 90 : 3 = **30 liczb**.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:
Po prostu wypisujemy te liczby:
12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.
Razem **30 liczb**, więc odp. **A** jest poprawna.

29.11.
Z treści zadania wynika, żeby obliczyć ile jest liczb naturalnych **5-cyfrowych**, które **nie są** podzielne przez 5.
Początkowa cyfra dowolna od **1** do **9** (wybór na **9 sposobów**).
Druga, trzecia oraz czwarta cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej z nich na **10 sposobów**).
Żeby liczba **nie była** podzielna przez 5, to **nie może** kończyć się cyfrą **0** ani cyfrą **5**.
Ostatnią cyfrą może być zatem: **1, 2, 3, 4, 6, 7, 8** lub **9** (wybór na **8 sposobów**).

Stosując regułę mnożenia, mamy **72000** takich liczb.

$$\overset{1-9}{9} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{1,2,3,4,\ 6,7,8,9}{8} = \mathbf{72000}$$

Odp. **C**

29.12.
Początkowa cyfra dowolna od **1** do **9** (wybór na **9 sposobów**).
Druga oraz trzecia cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej z nich na **10 sposobów**).
Ostatnia cyfra **nie może być zerem** (wybór na **9 sposobów**).

Stosując regułę mnożenia, mamy **8100** takich liczb.

$$\overset{1-9}{9} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{1-9}{9} = \mathbf{8100}$$

Odp. **C**

29.13.
Początkowa cyfra dowolna od **1** do **9** (wybór na **9 sposobów**).
Druga, trzecia, czwarta oraz piąta cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej na **10 sposobów**).
Ostatnia, szósta cyfra może być **dowolna oprócz 0** i **5** (wybór na **8 sposobów**).

Stosując regułę mnożenia, mamy **720000** takich **liczb**.

$$\overset{1-9}{9} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{0-9}{10} \cdot \overset{1,2,3,4,\ 6,7,8,9}{8} = \mathbf{720000}$$

Ponieważ $10^5 = 100000$, to wynik $7{,}2 \cdot 10^5 = 7{,}2 \cdot 100000 = \mathbf{720000}$.

Odp. **A**

29.14.
Liczby mogą być jednocyfrowe, dwucyfrowe bądź trzycyfrowe.

Jednocyfrowe: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Mamy **8** takich **liczb**.

Dwucyfrowe:
Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).
Druga (ostatnia) cyfra może być dowolna oprócz **0** i **5**
(wybór na **8 sposobów**).
Stosując regułę mnożenia, mamy **9**·**8** = **72** takie **liczby**

$$\overset{1-9}{\boxed{9}} \cdot \overset{1,2,3,4,\ 6,7,8,9}{\boxed{8}} = \mathbf{72}$$

Trzycyfrowe:
Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).
Druga cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór na **10 sposobów**).
Ostatnia (trzecia) cyfra może być dowolna oprócz **0** i **5**
(wybór na **8 sposobów**).
Zgodnie z regułą mnożenia, mamy **9**·**10**·**8** = **720** takich **liczb**.

$$\overset{1-9}{\boxed{9}} \cdot \overset{0-9}{\boxed{10}} \cdot \overset{1,2,3,4,\ 6,7,8,9}{\boxed{8}} = \mathbf{720}$$

Zatem istnieje 8 + 72 + 720 = **800 liczb** spełniających warunki zadania.

Odp. **C**

29.15.
Liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 100, tzn. liczb z zakresu od **1** do **99**, jest dokładnie **99 sztuk**.
Wśród nich wypisujemy te **podzielne** przez **11**:
11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 → jest ich **9**.

Zatem istnieje 99 – 9 = **90** liczb **<u>niepodzielnych</u>** przez 11, mniejszych od 100.

Odp. **D**

29.16.

Chodzi o liczby 100, 120, 140, 160, ... , 1960, 1980, 2000.

Aby ich wszystkich nie wypisywać, można zauważyć że tworzą one **ciąg arytmetyczny**, w którym $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{100}$, $\boldsymbol{r} = \mathbf{20}$ oraz $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{2000}$. Wyliczamy wartość $\boldsymbol{n}$.

Stosujemy wzór z **karty wzorów** (str. 3), na ***n*-ty** wyraz ciągu arytmetycznego.

- Ciąg arytmetyczny

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$2000 = 100 + (n-1) \cdot 20$$
$$2000 = 100 + 20n - 20$$
$$-20n = 100 - 20 - 2000$$
$$-20n = -1920 \qquad |:(-20)$$
$$\boldsymbol{n = 96}$$

Odp. **B**

29.17.

Rozwiązanie I:

Chodzi o liczby 10000, 10100, 10200, 10300, ... , 99700, 99800, 99900.

Aby ich wszystkich nie wypisywać, można zauważyć że tworzą one **ciąg arytmetyczny**, w którym $\boldsymbol{a_1}$ = **10000**, $\boldsymbol{r}$ **= 100** oraz $\boldsymbol{a_n}$ = **99900**. Wyliczamy wartość $\boldsymbol{n}$.

- <u>Ciąg arytmetyczny</u>

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Stosujemy wzór z **karty wzorów** (str. 3), na $\boldsymbol{n}$**-**ty wyraz ciągu arytmetycznego.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$99900 = 10000 + (n-1) \cdot 100$$
$$99900 = 10000 + 100n - 100$$
$$-100n = 10000 - 100 - 99900$$
$$-100n = -90000 \qquad |:(-100)$$
$$\boldsymbol{n = 900}$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Liczba jest podzielna przez 100, gdy kończy się **dwoma zerami**.

Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).

Druga oraz trzecia cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej z nich na **10 sposobów**).

Na końcu liczby muszą być **dwa zera** (wybór na **1 sposób**).

$$\overbrace{\mathbf{9}}^{1-9} \cdot \overbrace{\mathbf{10}}^{0-9} \cdot \overbrace{\mathbf{10}}^{0-9} \cdot \overbrace{\mathbf{1}}^{0} \cdot \overbrace{\mathbf{1}}^{0} = \mathbf{900}$$

Zgodnie z regułą mnożenia, mamy **900** takich liczb.

Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

29.18.

Rozwiązanie I:

Chodzi o liczby 100000, 100200, 100400, 100600, ... , 999400, 999600, 999800.

Aby ich wszystkich nie wypisywać, można zauważyć że tworzą one **ciąg arytmetyczny**, w którym $\boldsymbol{a_1}$ = **100000**, $\boldsymbol{r}$ **= 200** oraz $\boldsymbol{a_n}$ = **999800**.

Wyliczamy wartość $\boldsymbol{n}$.

- <u>Ciąg arytmetyczny</u>

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Stosujemy wzór z **karty wzorów** (str. 3), na $\boldsymbol{n}$-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$999800 = 100000 + (n-1) \cdot 200$$

$$999800 = 100000 + 200n - 200$$

$$-200n = 100000 - 200 - 999800$$

$$-200n = -900000 \qquad |:(-200)$$

$$\boldsymbol{n = 4500}$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Aby liczba była podzielna przez 200, to dwie ostatnie cyfry muszą być zerami, a trzecia cyfra od końca musi być parzysta.

Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).

Druga oraz trzecia cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej z nich na **10 sposobów**).

Kolejna (trzecia od końca) cyfra musi być **parzysta** (wybór na **5 sposobów**).

Pozostałe dwie cyfry muszą być **zerami** (wybór na **1 sposób**).

Zgodnie z regułą mnożenia, jest **4500 liczb** spełniających warunki zadania.

$$\overset{1-9}{\mathbf{9}} \cdot \overset{0-9}{\mathbf{10}} \cdot \overset{0-9}{\mathbf{10}} \cdot \overset{0,\,2,\,4,\,6,\,8}{\mathbf{5}} \cdot \overset{0}{\mathbf{1}} \cdot \overset{0}{\mathbf{1}} = \mathbf{4500}$$

Oznacza to, że odp. **C** jest prawidłowa.

29.19.

Rozwiązanie I:

Chodzi o liczby 1000000, 1000500, 1001000, 1001500, ... , 9998500, 9999000, 9999500.

Aby ich wszystkich nie wypisywać, można zauważyć że tworzą one **ciąg arytmetyczny**, w którym $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{1000000}$, $\boldsymbol{r} = \mathbf{500}$ oraz $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{9999500}$.

Wyliczamy wartość $\boldsymbol{n}$.

> • Ciąg arytmetyczny
>
> Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:
>
> $$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$
>
> Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:
>
> $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$
>
> Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:
>
> $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Stosujemy wzór z **karty wzorów** (str. 3), na $\boldsymbol{n}$-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$9999500 = 1000000 + (n-1) \cdot 500$$
$$9999500 = 1000000 + 500n - 500$$
$$-500n = 1000000 - 500 - 9999500$$
$$-500n = -9000000 \qquad |:(-500)$$
$$\boldsymbol{n = 18000}$$

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Aby liczba była podzielna przez 500, to dwie ostatnie cyfry muszą być zerami, a trzecia cyfra od końca musi być równa **0** lub **5**.

Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).

Druga, trzecia oraz czwarta cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór każdej z nich na **10 sposobów**).

Kolejna (trzecia od końca) cyfra może być równa **0** lub **5** (wybór na **2 sposoby**).

Pozostałe dwie cyfry muszą być **zerami** (wybór na **1 sposób**).

Zgodnie z regułą mnożenia, jest **18000 liczb** spełniających warunki zadania.

$$\underbrace{9}_{1-9} \cdot \underbrace{10}_{0-9} \cdot \underbrace{10}_{0-9} \cdot \underbrace{10}_{0-9} \cdot \underbrace{2}_{0,\,5} \cdot \underbrace{1}_{0} \cdot \underbrace{1}_{0} = \mathbf{18000}$$

Oznacza to, że odp. **A** jest prawidłowa.

29.20.

Chodzi o liczby 100, 200, 300, 400, ... , 9700, 9800, 9900.

Aby ich wszystkich nie wypisywać, można zauważyć że tworzą one **ciąg arytmetyczny**, w którym $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{100}$, $\boldsymbol{r} = \mathbf{100}$ oraz $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{9900}$. Wyliczamy wartość $\boldsymbol{n}$.

Stosujemy wzór z **karty wzorów** (str. 3), na ***n*-ty** wyraz ciągu arytmetyczny.

- Ciąg arytmetyczny

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$9900 = 100 + (n-1) \cdot 100$$
$$9900 = 100 + 100n - 100$$
$$-100n = 100 - 100 - 9900$$
$$-100n = -9900 \qquad |:(-100)$$
$$\boldsymbol{n = 99}$$

Odp. **D**

29.21.
Wyliczamy najpierw, ile jest wszystkich liczb naturalnych
2-cyfrowych.
Pierwszą cyfrę wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**).
Druga cyfra dowolna od **0** do **9** (wybór na **10 sposobów**).
Zgodnie z regułą mnożenia, mamy **9**·**10** = **90 liczb** 2-cyfrowych.

$$\overbrace{9}^{1-9} \cdot \overbrace{10}^{0-9} = 90$$

Przedział $\langle 100; k\rangle$ zawiera **90 liczb naturalnych** dla ***k* = 189**.

Wówczas mamy $\langle 100;189\rangle$, więc należą do niego następujące liczby naturalne:

101, 102, 103, 104, ... , 187, 188, 189 → 89 liczb
do tego doliczamy liczbę 100, więc mamy **90 liczb**.

Odp. **A**

29.22.
Do przedziału $(-14;5)$ należą następujące liczby całkowite:
–13, –12, –11, –10, –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.
Łącznie **18 liczb**.

Wypisujemy liczby dwucyfrowe spełniające warunki z proponowanych odpowiedzi:

A. Liczby dwucyfrowe podzielne przez 4 to:
12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96.
Razem **22 liczby**, więc odp. A odpada.

B. Liczby dwucyfrowe podzielne przez 5 to:
10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.
Razem **18 liczb**, więc odp. B jest poprawna.

Odp. **B**

29.23.
Obliczamy, ile jest liczb naturalnych parzystych 2-cyfrowych.
Cyfrę dziesiątek wybieramy dowolną od **1** do **9** (na **9 sposobów**)
Liczba parzysta musi być zakończona **0**, **2**, **4**, **6** lub **8** (na **5 sposobów**).
Z reguły mnożenia, liczb 2-cyfrowych podzielnych przez 2 jest **9·5** = **45**.

$$\overbrace{9}^{1-9} \cdot \overbrace{5}^{0,2,4,6,8} = 45$$

Sprawdzamy, w której odpowiedzi zaproponowano przedział do którego należy dokładnie **45 liczb całkowitych**:

A. $\langle -32;44\rangle$ → 32 ujemne + 44 dodatnie + liczba zero → 32 + 44 + 1 = 77 liczb całkowitych

B. $\langle -32;45\rangle$ → 32 ujemne + 45 dodatnich + liczba zero →32 + 45 + 1 = 78 liczb całkowitych

C. $\langle -32;12\rangle$ → 32 ujemne + 12 dodatnich + liczba zero →32 + 12 + 1 = **45 liczb całkowitych**

D. $\langle -32;13\rangle$ → 32 ujemne + 13 dodatnich + liczba zero →32 + 13 + 1 = 46 liczb całkowitych

Odp. **C**

29.24.
Do przedziału $\langle -7;3)$ należą następujące liczby całkowite:
–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, czyli **10 liczb**.

Rozważamy propozycje w odpowiedziach sprawdzając, w którym przypadku wypiszemy dokładnie **10 liczb**.

A. liczby 2-cyfrowe podzielne przez 9:
18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 → **10 liczb**

B. liczby 2-cyfrowe podzielne przez 10:
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 → 9 liczb

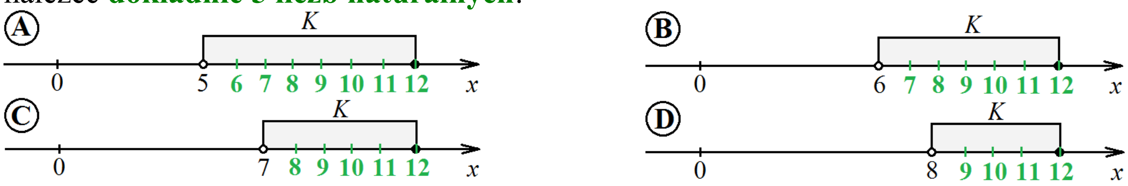
C. liczby 2-cyfrowe podzielne przez 11:
11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 → 9 liczb

D. liczby 2-cyfrowe podzielne przez 12:
12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 → 8 liczb

Odp. **A**

29.25.
Wypisujemy liczby podzielne przez 2018 (wielokrotności 2018) mniejsze od 10101:
2018, 4036, 6054, 8072, 10090 → **5 liczb**.

Rozważamy proponowane odpowiedzi patrząc, w którym przypadku do zbioru *K* będzie należeć **dokładnie 5 liczb naturalnych**:



Z powyższych rysunków widać, że w przypadku odp. **C**, tzn. dla ***t* = 7**, do przedziału $K = (7,12\rangle$ należy dokładnie **5 liczb naturalnych**: są to liczby **8, 9, 10, 11** i **12**.

Odp. **C**

29.26.
Pierwszą cyfrą kodu jest cyfra **2** (wybór na **1 sposób**).
Drugą cyfrą może być jedna z 7 cyfr: **0, 1, 3, 4, 6, 8** lub **9** (wybór na **7 sposobów**).
Trzecia cyfrą wybieramy z tego samego zbioru **0, 1, 3, 4, 6, 8, 9** ale nie może być to cyfra wybrana wcześniej (wybór na **6 sposobów**).
Czwartą z kolei cyfrę – z tego samego powodu – wybieramy już tylko na **5 sposobów**.
Piąta cyfra jest ustalona, musi być nią cyfra **5** (wybór na **1 sposób**).

Stosując regułę mnożenia, otrzymujemy **210 kodów** spełniających warunki zadania.

$$\underset{1}{\underline{2}} \cdot \underset{7}{\underline{0,1,3,4,6,8,9}} \cdot \underset{6}{\underline{\cancel{0},1,3,4,6,8,9}} \cdot \underset{5}{\underline{\cancel{0},\cancel{1},3,4,6,8,9}} \cdot \underset{1}{\underline{5}} = \mathbf{210}$$

Odp. **C**

29.27.
Pierwszą cyfrą kodu może być dowolna cyfra od **0** do **9** (wybór na **10 sposobów**).
Druga cyfra nie może być taka sama jak pierwsza (wybór na **9 sposobów**).
Trzecia cyfra nie może być taka jak pierwsza ani druga (wybór na **8 sposobów**).
Czwarta cyfra musi być różna od pierwszej, drugiej i trzeciej (wybór na **7 sposobów**).
Piątą cyfrę wybieramy na **6 sposobów**, a ostatnią szóstą na **5 sposobów**.

Zgodnie z regułą mnożenia, mamy $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ sześciocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

$$\underset{10}{\underline{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{9}{\underline{\cancel{0},1,2,3,4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{8}{\underline{\cancel{0},\cancel{1},2,3,4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{7}{\underline{\cancel{0},\cancel{1},\cancel{2},3,4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{6}{\underline{\cancel{0},\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{5}{\underline{\cancel{0},\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},5,6,7,8,9}}$$

Odp. **D**

29.28.
Każdą z pięciu cyfr kodu wybieramy spośród dziewięciu cyfr ze zbioru **0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9** (wybieramy na **9 sposobów**).

Stosując regułę mnożenia, mamy $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$ kodów spełniających warunki zadania.

$$\underset{9}{\underline{0,1,2,\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{9}{\underline{0,1,2,\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{9}{\underline{0,1,2,\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{9}{\underline{0,1,2,\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} \cdot \underset{9}{\underline{0,1,2,\cancel{3},4,5,6,7,8,9}} = \mathbf{9^5}$$

Uwaga! Kod – w przeciwieństwie do liczby – może zaczynać się cyfrą **0**.

Odp. **B**

29.29.

Każdą z trzech cyfr kodu wybieramy spośród siedmiu cyfr ze zbioru **0, 1, 2, 4, 5, 6** (wybieramy na **7 sposobów**).

$$\underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{7} \cdot \underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{7} \cdot \underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{7} = \mathbf{343}$$

Stosując regułę mnożenia, mamy $7 \cdot 7 \cdot 7 = \mathbf{343}$ kody spełniające warunki zadania.

Odp. **D**

29.30.

Z treści zadania wynika, że każda z cyfr kodu musi być parzysta, tzn. **0, 2,4, 6** lub **8**.

Zatem pierwszą cyfrę wybieramy na **5 sposobów**.
Drugą cyfrę już na **4 sposoby** (odpada cyfra wybrana jako pierwsza).
Trzecią cyfrę wybieramy na **3 sposoby** (odpadają cyfry wybrane wcześniej jako pierwsza i druga), a czwartą cyfrę wybieramy na **2 sposoby**.

Stosując regułę mnożenia, mamy $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ kody spełniające warunki zadania.

$$\underbrace{0,2,4,6,8}_{5} \cdot \underbrace{\cancel{0},2,4,6,8}_{4} \cdot \underbrace{\cancel{0},\cancel{2},4,6,8}_{3} \cdot \underbrace{\cancel{0},\cancel{2},\cancel{4},6,8}_{2}$$

Odp. **C**

29.31.

Rozwiązanie I:

Aby liczba 2-cyfrowa była parzysta, wystarczy, żeby cyfrą jedności była jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8, przy **dowolnej** (oprócz zera) cyfrze dziesiątek. Cyfrę dziesiątek wybieramy na 7 sposobów. Cyfrę jedności wybieramy na 3 sposoby (możemy wybrać jedną z trzech cyfr: 2, 4 lub 6, bo takie właśnie cyfry parzyste są w zbiorze {1,2,3,4,5,6,7}).

$$\overset{1,2,3,4,5,6,7}{\overline{7}} \cdot \overset{2,4,6}{\overline{3}} = \mathbf{21}$$

Łącznie, mamy 7·3 = **21 liczb** spełniających warunki zadania.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Ze względu na dany w zadaniu zbiór cyfr {1,2,3,4,5,6,7} rysujemy tabelę i wypisujemy (poziomo i pionowo) wszystkie cyfry ze zbioru. Przyjmujemy umowę odnośnie cyfr wypisanych pionowo oraz poziomo:

- pionowo: I losowanie (cyfra dziesiątek),
- poziomo: II losowanie (cyfra jedności), tak jak na rys. 1.

①

dz \ j	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Np. **kwadrat oznaczony na zielono** na rys. 1 odwzorowuje uzyskanie liczby **64** (w I losowaniu wylosowano 6, a w II losowaniu 4).

Zgodnie z przyjętą umową, uzupełniamy tabelę (rys. 2).

W uzupełnionej tabeli **zliczamy** te **liczby**, które są **parzyste** (rys. 3).

②

dz \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	11	12	13	14	15	16	17
2	21	22	23	24	25	26	27
3	31	32	33	34	35	36	37
4	41	42	43	44	45	46	47
5	51	52	53	54	55	56	57
6	61	62	63	64	65	66	67
7	71	72	73	74	75	76	77

③

dz \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	11	**12**	13	**14**	15	**16**	17
2	21	**22**	23	**24**	25	**26**	27
3	31	**32**	33	**34**	35	**36**	37
4	41	**42**	43	**44**	45	**46**	47
5	51	**52**	53	**54**	55	**56**	57
6	61	**62**	63	**64**	65	**66**	67
7	71	**72**	73	**74**	75	**76**	77

Okazuje się, że można utworzyć **21 liczb parzystych**, więc odp. **A** jest poprawna.

Rozwiązanie III:

Po prostu **wypisujemy** wszystkie liczby parzyste, które możemy otrzymać, mając do dyspozycji cyfry {1,2,3,4,5,6,7}. **Uwaga!** Losowanie **ze zwracaniem** oznacza, że **cyfry** w liczbie **mogą się powtarzać**!

Przy wypisywaniu warto skorzystać z jakiejś zasady, np. wypisujemy od najmniejszej do największej, lub najpierw wszystkie liczby z 2 na końcu, potem z 4 na końcu, itp. Pozwoli to zmniejszyć ryzyko pominięcia liczby.

12, 14, 16, 22, 24, 26, 32, 34, 36, 42, 44, 46, 52, 54, 56, 62, 64, 66, 72, 74, 76.

Wypisano w ten sposób **21 liczb**, więc odp. **A** jest poprawna.

29.32.

Rozwiązanie I:

Aby liczba 2-cyfrowa była podzielna przez 5 wystarczy, żeby cyfrą jedności była jedna z cyfr: **0** lub **5** przy **dowolnej** (oprócz zera) cyfrze dziesiątek.

Cyfrą dziesiątek może być: **3, 5, 6, 8** lub **9** (wybór na **5 sposobów**).

Cyfrą jedności może być **0** lub **5** (wybór na **2 sposoby**).

Łącznie, mamy **5**·**2** = **10 liczb** spełniających warunki zadania.

$$\underbrace{\cancel{0}, 3, 5, 6, 8, 9}_{5} \cdot \underbrace{0, \cancel{3}, 5, \cancel{6}, \cancel{8}, \cancel{9}}_{2} = 10$$

Odp. **C**

Rozwiązanie II:

Ze względu na dany w zadaniu zbiór cyfr {0,3,5,6,8,9} rysujemy tabelę i wypisujemy (poziomo i pionowo) wszystkie cyfry ze zbioru. Przyjmujemy umowę odnośnie cyfr wypisanych pionowo oraz poziomo:

– pionowo: I losowanie (cyfra dziesiątek),
– poziomo: II losowanie (cyfra jedności), tak jak na rys. 1.

1

dz \ j	0	3	5	6	8	9
0						
3						
5						
6						
8						
9						

Np. **kwadrat oznaczony na zielono** na rys. 1 odwzorowuje uzyskanie liczby **85** (w I losowaniu wylosowano 8, a w II losowaniu 5).

Zgodnie z przyjętą umową, uzupełniamy tabelę, wykreślając przypadki z zerem na początku (rys. 2), bo liczba nie może zaczynać się zerem.

2

dz \ j	0	3	5	6	8	9
0	~~00~~	~~03~~	~~05~~	~~06~~	~~08~~	~~09~~
3	30	33	35	36	38	39
5	50	53	55	56	58	59
6	60	64	65	66	68	69
8	80	83	85	86	88	89
9	90	93	95	96	98	99

3

dz \ j	0	3	5	6	8	9
0	~~00~~	~~03~~	~~05~~	~~06~~	~~08~~	~~09~~
3	30	33	35	36	38	39
5	50	53	55	56	58	59
6	60	64	65	66	68	69
8	80	83	85	86	88	89
9	90	93	95	96	98	99

W uzupełnionej tabeli **zliczamy** te **liczby**, które są **podzielne przez 5** (rys. 3).

Okazuje się, że można utworzyć **10 liczb** podzielnych przez 5, więc odp. **C** jest poprawna.

Rozwiązanie III:

Po prostu **wypisujemy** wszystkie liczby parzyste, które możemy otrzymać, mając do dyspozycji cyfry {0,3,5,6,8,9}. **Uwaga!** Losowanie **ze zwracaniem** oznacza, że **cyfry** w liczbie **mogą się powtarzać**!

30, 35, 50, 55, 60, 65, 80, 85, 90, 95.

Wypisano w ten sposób **10 liczb**, więc odp. **C** jest poprawna.

29.33.

Ze względu na dany w zadaniu zbiór cyfr {0,3,5,6,8,9} rysujemy tabelę i wypisujemy (poziomo i pionowo) wszystkie cyfry ze zbioru. Przyjmujemy umowę odnośnie cyfr wypisanych pionowo oraz poziomo:

– pionowo: I losowanie (cyfra dziesiątek),
– poziomo: II losowanie (cyfra jedności), tak jak na rys. 1.

Np. **kwadrat oznaczony na zielono** na rys. 1 odwzorowuje uzyskanie liczby **65** (w I losowaniu wylosowano 6, a w II losowaniu 5).

①

dz \ j	3	5	6	8
3				
5				
6				
8				

②

dz \ j	3	5	6	8
3	33	35	36	38
5	53	55	56	58
6	63	65	66	68
8	83	85	86	88

③

dz \ j	3	5	6	8
3	33	35	36	38
5	53	55	56	58
6	63	65	66	68
8	83	85	86	88

Zgodnie z przyjętą umową, uzupełniamy tabelę (rys. 2).

W uzupełnionej tabeli **zliczamy** te **liczby**, które są **podzielne przez 3** (rys. 3).

Okazuje się, że można utworzyć **4 liczb** podzielne przez 3. Są to liczby: **33, 36, 63, 66**.

Odp. **B**

29.34.

Ze względu na dany w zadaniu zbiór cyfr {1,2,3,4} rysujemy tabelę i wypisujemy (poziomo i pionowo) wszystkie cyfry ze zbioru. Przyjmujemy umowę odnośnie cyfr wypisanych pionowo oraz poziomo:

- pionowo: I losowanie (cyfra dziesiątek),
- poziomo: II losowanie (cyfra jedności), tak jak na rys. 1.

Np. **kwadrat oznaczony na zielono** na rys. 1 odwzorowuje uzyskanie liczby **32** (w I losowaniu wylosowano 3, a w II losowaniu 2).

1

dz \ j	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2

dz \ j	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

3

dz \ j	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

Zgodnie z przyjętą umową, uzupełniamy tabelę (rys. 2).

W uzupełnionej tabeli **zliczamy** te **liczby**, które są **większe od 21** (rys. 3).

Okazuje się, że można utworzyć **11 liczb** (czyli **mniej niż 12**) które są większe od 21.

Odp. **A**

29.35.

Ze względu na dany w zadaniu zbiór cyfr {1,2,3,4,5} rysujemy tabelę i wypisujemy (poziomo i pionowo) wszystkie cyfry ze zbioru. Przyjmujemy umowę odnośnie cyfr wypisanych pionowo oraz poziomo:

- pionowo: I losowanie (cyfra dziesiątek),
- poziomo: II losowanie (cyfra jedności), tak jak na rys. 1.

Np. **kwadrat oznaczony na zielono** na rys. 1 odwzorowuje uzyskanie liczby **32** (w I losowaniu wylosowano 3, a w II losowaniu 2).

1

dz \ j	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

2

dz \ j	1	2	3	4	5
1	11	12	13	14	15
2	21	22	23	24	25
3	31	32	33	34	35
4	41	42	43	44	45
5	51	52	53	54	55

3

dz \ j	1	2	3	4	5
1	11	12	13	14	15
2	21	22	23	24	25
3	31	32	33	34	35
4	41	42	43	44	45
5	51	52	53	54	55

Zgodnie z przyjętą umową, uzupełniamy tabelę (rys. 2).

W uzupełnionej tabeli **zliczamy** te **liczby**, które są **mniejsze od 40** (rys. 3).

Okazuje się, że można utworzyć **15 liczb** które są mniejsze od 40.

Odp. **D**