2.1.

$\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = x$ $\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\sqrt{5}\right)^x = \frac{1}{25}$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 5

$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{5^2}$

$5^{\frac{1}{2}x} = 5^{-2}$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$\frac{1}{2}x = -2$ $\qquad$ mnożymy stronami przez 2

$x = -4$

$6 \cdot \underbrace{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right)}_{(-4)} = 6 \cdot (-4) = \mathbf{-24}$.

Odp. **A**

2.2.

$\log_{\sqrt{3}} 27 = x$ $\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\sqrt{3}\right)^x = 27$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 3

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^3$

$3^{\frac{1}{2}x} = 3^3$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$\frac{1}{2}x = 3$ $\qquad$ mnożymy stronami przez 2

$x = 6$.

Odp. **D**

2.3.

$\log_5\left(\frac{1}{125}\right)=x$ $\qquad\qquad$ $\log_a b=x \quad \leftrightarrow \quad a^x=b$

$5^x=\frac{1}{125}$ $\qquad\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 5

$5^x=\frac{1}{5^3}$

$5^x=5^{-3}$ $\qquad\qquad$ porównujemy wykładniki

$x=-3$

$2\cdot\underbrace{\log_5\left(\frac{1}{125}\right)}_{(-3)}=2\cdot(-3)=\mathbf{-6}$.

Odp. **D**

2.4.

$\log_3\left(3\sqrt{3}\right)=x$ $\qquad\qquad$ $\log_a b=x \quad \leftrightarrow \quad a^x=b$

$3^x=3\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 3

$3^x=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$3^x=3^{1\frac{1}{2}}$ $\qquad\qquad$ porównujemy wykładniki

$x=1\frac{1}{2}=\mathbf{1{,}5}$.

Odp. **A**

2.5.

$0{,}04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

$\log_5\frac{1}{25}=x$ $\qquad\qquad$ $\log_a b=x \quad \leftrightarrow \quad a^x=b$

$5^x=\frac{1}{25}$ $\qquad\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 5

$5^x=\frac{1}{5^2}$

$5^x=5^{-2}$ $\qquad\qquad$ porównujemy wykładniki

$x=-2$

Odp. **B**

2.6.

$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{4}} 4 = x$ $\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 4

$\left(4^{-1}\right)^x = 4^1$

$4^{-x} = 4^1$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$-x = 1$ $\qquad$ mnożymy stronami przez (–1)

$x = -1$

$3 \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{4}} 4}_{(-1)} = 3 \cdot (-1) = \mathbf{-3}$

Odp. **D**

2.7.

$\log_{\frac{1}{3}} \left(3\sqrt{3}\right) = x$ $\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3\sqrt{3}$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 3

$\left(3^{-1}\right)^x = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{-x} = 3^{1\frac{1}{2}}$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$-x = 1\frac{1}{2}$ $\qquad$ mnożymy stronami przez (–1)

$x = -1\frac{1}{2} = -\mathbf{\frac{3}{2}}$

Odp. **A**

2.8.

$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\log_{\frac{1}{5}} 5 = x$ $\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 5

$\left(5^{-1}\right)^x = 5^1$

$5^{-x} = 5^1$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$-x = 1$ $\qquad$ mnożymy stronami przez (–1)

$x = -1$

Odp. **B**

2.9.

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$ $\qquad$ $\log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 2

$\left(2^{-1}\right)^x = 2^3$

$2^{-x} = 2^3$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$-x = 3$ $\qquad$ mnożymy stronami przez (–1)

$x = -3$

Odp. **C**

2.10.

$\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{36}\right) = x$ $\qquad$ $\log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$\left(\frac{1}{6}\right)^x = \frac{1}{36}$ $\qquad$ przedstawiamy liczby jako potęgi liczby 6

$\left(6^{-1}\right)^x = \frac{1}{6^2}$

$6^{-x} = 6^{-2}$ $\qquad$ porównujemy wykładniki

$-x = -2$ $\qquad$ mnożymy stronami przez (–1)

$x = 2 \quad \rightarrow \quad 4 \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{36}\right)}_{2} = 4 \cdot 2 = \mathbf{8}$.

Odp. **A**

2.11.

Niech $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = x$ oraz $\log_4(0{,}25) = y$. Obliczamy osobno każdy z dwóch logarytmów:

$3^x = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad 3^x = 9^{-1} \quad \rightarrow \quad 3^x = \left(3^2\right)^{-1} \quad \rightarrow \quad 3^x = 3^{-2} \quad \rightarrow \quad x = -2$

$4^y = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad 4^y = \frac{25}{100} \quad \rightarrow \quad 4^y = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 4^y = 4^{-1} \quad \rightarrow \quad y = -1$

Podstawiamy wyliczone logarytmy do wyrażenia:

$k = \underbrace{\log_3\left(\frac{1}{9}\right)}_{-2} - 3 \cdot \underbrace{\log_4(0{,}25)}_{(-1)} = -2 - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 = \mathbf{1}$

Odp. **D**

2.12.

Niech $\log_{27} 3 = x$ oraz $\log_8 16 = y$. Obliczamy osobno każdy z dwóch logarytmów:

$$27^x = 3 \quad \to \quad \left(3^3\right)^x = 3^1 \quad \to \quad 3^{3x} = 3^1 \quad \to \quad 3x = 1 \quad \to \quad x = \frac{1}{3}$$

$$8^y = 16 \quad \to \quad \left(2^3\right)^y = 2^4 \quad \to \quad 2^{3y} = 2^4 \quad \to \quad 3y = 4 \quad \to \quad y = \frac{4}{3}$$

Podstawiamy wyliczone logarytmy do wyrażenia:

$$\log_{27} 3 + \log_8 16 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}.$$

Odp. **C**

2.13.

$$0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Niech $\log_5 \frac{1}{25} = x$ oraz $\log_{\frac{1}{3}} 27 = y$. Obliczamy osobno każdy z dwóch logarytmów:

$$5^x = \frac{1}{25} \quad \to \quad 5^x = \frac{1}{5^2} \quad \to \quad 5^x = 5^{-2} \quad \to \quad x = -2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = 27 \quad \to \quad \left(3^{-1}\right)^y = 3^3 \quad \to \quad 3^{-y} = 3^3 \quad \to \quad -y = 3 \quad \to \quad y = -3$$

Podstawiamy wyliczone logarytmy do wyrażenia:

$$\underbrace{\log_5 0{,}04}_{-2} - 2 \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{3}} 27}_{(-3)} = -2 - 2 \cdot (-3) = -2 + 6 = \mathbf{4}.$$

Odp. **A**

2.14.

Niech $\log_{64} 4 = x$ oraz $\log_{16} 8 = y$. Obliczamy osobno każdy z dwóch logarytmów:

$$64^x = 4 \quad \to \quad \left(4^3\right)^x = 4^1 \quad \to \quad 4^{3x} = 4^1 \quad \to \quad 3x = 1 \quad \to \quad x = \frac{1}{3}$$

$$16^y = 8 \quad \to \quad \left(2^4\right)^y = 2^3 \quad \to \quad 2^{4y} = 2^3 \quad \to \quad 4y = 3 \quad \to \quad y = \frac{3}{4}$$

Podstawiamy wyliczone logarytmy do wyrażenia:

$$\underbrace{\log_{64} 4}_{\frac{1}{3}} + 3 \cdot \underbrace{\log_{16} 8}_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{9}{4} = \frac{4}{12} + \frac{27}{12} = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12}.$$

Odp. **B**

2.15.

$\log_4 1 = 0$ (każdy logarytm, którego liczba logarytmowana to 1, jest równy 0)

$\log_{32}\frac{1}{2} = x$, wówczas $32^x = \frac{1}{2} \rightarrow (2^5)^x = 2^{-1} \rightarrow 2^{5x} = 2^{-1} \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$.

$$\underbrace{\log_4 1}_{0} - \underbrace{\log_{32}\frac{1}{2}}_{\left(-\frac{1}{5}\right)} = 0 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} = \mathbf{0{,}2}$$

Odp. **A**

2.16.

Niech $\log_5 125 = x,\ \log_{125} 5 = y$. Korzystamy z definicji logarytmu:

$5^x = 125 \qquad \rightarrow \qquad 5^x = 5^3 \qquad \rightarrow \qquad x = 3$

$125^y = 5 \qquad \rightarrow \qquad (5^3)^y = 5^1 \qquad \rightarrow \qquad 5^{3y} = 5^1 \qquad \rightarrow \qquad 3y = 1 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{3}$

$$\frac{\log_5 125}{\log_{125} 5} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{1} = \mathbf{9}$$

Odp. **D**

Uwaga! Wyrażenie $\frac{3}{\frac{1}{3}}$ można też policzyć na kalkulatorze, wykorzystując to, że $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

$$\frac{3}{\frac{1}{3}} \approx \frac{3}{0{,}33} \approx 9{,}09 \approx 9$$

2.17.

$0{,}5 = \frac{1}{2}$

Niech $\log_{\frac{1}{2}} 64 = x,\ \log_3 27 = y$. Korzystamy z definicji logarytmu:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64 \qquad \rightarrow \qquad (2^{-1})^x = 2^6 \qquad \rightarrow \qquad 2^{-x} = 2^6 \qquad \rightarrow \qquad -x = 6 \qquad \rightarrow \qquad x = -6$

$3^y = 27 \qquad \rightarrow \qquad 3^y = 3^3 \qquad \rightarrow \qquad y = 3$

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}} 64}{\log_3 27} = \frac{-6}{3} = \mathbf{-2}$$

Odp. **B**

2.18.

Niech $\log_4 2 = x$, $\log_6 36 = y$. Korzystamy z definicji logarytmu:

$4^x = 2 \quad \rightarrow \quad (2^2)^x = 2^1 \quad \rightarrow \quad 2^{2x} = 2^1 \quad \rightarrow \quad 2x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$6^y = 36 \quad \rightarrow \quad 6^y = 6^2 \quad \rightarrow \quad y = 2$

$\frac{1+\log_4 2}{3+\log_6 36} = \frac{1+0{,}5}{3+2} = \frac{1{,}5}{5} = \mathbf{0{,}3}$.

Odp. **B**

2.19.

Niech $\log_5 \sqrt{5} = x$, $\log_4 64 = y$. Korzystamy z definicji logarytmu:

$5^x = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad 5^x = 5^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$4^y = 64 \quad \rightarrow \quad 4^y = 4^3 \quad \rightarrow \quad y = 3$

$\frac{\log_5(\sqrt{5})}{\log_4 64} = \frac{0{,}5}{3} \approx \mathbf{0{,}16666}...$ oraz $\mathbf{\frac{1}{6}} \approx \mathbf{0{,}16666}...$

Odp. **A**

2.20.

Każdy logarytm, którego liczba logarytmowana to 1, jest równy 0. Zatem:

$\frac{\log_{0,4} 1}{\log_7 49} = \frac{0}{\log_7 49} = \mathbf{0}$

Gdy w ułamku licznik wynosi 0, a mianownik różny od 0, to ułamek jest równy zero.

Odp. **C**

2.21.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$

$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9 \cdot 4) = \log_6 36 = x$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$6^x = 36 \quad \rightarrow \quad 6^x = 6^2 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{2}$

Odp. **A**

2.22.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$

$\log_4 5 + \log_4 12{,}8 = \log_4(5 \cdot 12{,}8) = \log_4 64 = x$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$4^x = 64 \quad \rightarrow \quad 4^x = 4^3 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{3}$

Odp. **B**

2.23.
Wykorzystujemy wzór na sumę logarytmów o tych samych podstawach.
$a+b=\log_8 6{,}4+\log_8 5=\log_8(6{,}4\cdot 5)=\log_8 32=x$
Korzystamy z definicji logarytmu:
$8^x=32 \quad \to \quad (2^3)^x=2^5 \quad \to \quad 2^{3x}=2^5 \quad \to \quad 3x=5 \quad \to \quad x=\frac{5}{3}$
Odp. **A**

2.24.
Wykorzystujemy wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
$\log_6 108+\log_6 2=\log_6(108\cdot 2)=\log_6 216=x$
Korzystamy z definicji logarytmu:
$6^x=216 \quad \to \quad 6^x=6^3 \quad \to \quad x=\mathbf{3}$
Odp. **C**

2.25.
Wykorzystujemy wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$
$\log_{16} 8+\log_{16} 2=\log_{16}(8\cdot 2)=\log_{16} 16=\mathbf{1}$
Każdy logarytm, o podstawie równej liczbie logarytmowanej, jest równy 1, tj. $\log_a a=1$ dla $a>0$ i $a\neq 1$. Np. $\log_6 6=1$, $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$, $\log_{15\pi}15\pi=1$, itp.
Odp. **B**

2.26.
Wykorzystujemy wzór $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$
$\log_2 80-\log_2 10=\log_2\left(\frac{80}{10}\right)=\log_2 8$
Korzystamy z definicji logarytmu:
$2^x=8 \quad \to \quad 2^x=2^3 \quad \to \quad x=\mathbf{3}$
Odp. **B**

2.27.
Wykorzystujemy wzór $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$
$\log_3 45-\log_3 5=\log_3\left(\frac{45}{5}\right)=\log_3 9=x$
Korzystamy z definicji logarytmu:
$3^x=9 \quad \to \quad 3^x=3^2 \quad \to \quad x=\mathbf{2}$
Odp. **A**

2.28.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$$\log_6 180 - \log_6 5 = \log_6\left(\frac{180}{5}\right) = \log_6 36 = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$6^x = 36 \quad \to \quad 6^x = 6^2 \quad \to \quad x = \mathbf{2}$

Odp. **C**

2.29.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$$\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{6}{3}\right) = \log_2 2 = \mathbf{1}.$$

Odp. **B**

2.30.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$$\log_4 448 - \log_4 7 = \log_4\left(\frac{448}{7}\right) = \log_4 64 = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$4^x = 64 \quad \to \quad 4^x = 4^3 \quad \to \quad x = \mathbf{3}$

Odp. **A**

2.31.

Ponieważ $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, to podstawa obu logarytmów jest taka sama i wynosi $\frac{1}{4}$.

Zatem można zastosować wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$.

$$\log_{0{,}25} 3 - \log_{\frac{1}{4}} 6 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{6}\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{2} \to \left(4^{-1}\right)^x = 2^{-1} \to 4^{-x} = 2^{-1} \to \left(2^2\right)^{-x} = 2^{-1} \to 2^{-2x} = 2^{-1} \to -2x = -1 \to$$

$$\to x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = 0{,}5$$

Odp. **A**

2.32.

Ponieważ $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, to podstawa obu logarytmów jest taka sama i wynosi $\frac{3}{5}$.

Zatem można zastosować wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$.

$$\log_{\frac{3}{5}} 0{,}72 - \log_{0,6} 2 = \log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{0{,}72}{2}\right) = \log_{\frac{3}{5}} 0{,}36 = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu, pamiętając, że $0{,}36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 0{,}36 \ \rightarrow \ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{25} \ \rightarrow \ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \ \rightarrow \ x = \mathbf{2}$$

Odp. **C**

2.33.

Ponieważ $0{,}5 = \frac{1}{2}$, to podstawa obu logarytmów jest taka sama i wynosi $\frac{1}{2}$.

Zatem można zastosować wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$.

$$\log_{\frac{1}{2}} 22 - \log_{\frac{1}{2}} 11 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{22}{11}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \quad \rightarrow \quad \left(2^{-1}\right)^x = 2^1 \quad \rightarrow \quad 2^{-x} = 2^1 \ \rightarrow \quad -x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{-1}$$

Odp. **B**

2.34.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$$\log_{\frac{1}{3}} 135 - \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{135}{5}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = x$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \quad \rightarrow \quad \left(3^{-1}\right)^x = 3^3 \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = 3^3 \ \rightarrow \quad -x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{-3}$$

Odp. **B**

2.35.

Wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_3 2016 - \log_3 224 = \log_3\left(\frac{2016}{224}\right) = \log_3 9 = x$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$3^x = 9 \quad \rightarrow \quad 3^x = 3^2 \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{2}$

Odp. **A**

2.36.

Rozwiązanie I:

$4\log_3 2 - 3\log_3 4$ korzystamy ze wzoru $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$ dla obu logarytmów

$\log_3 2^4 - \log_3 4^3$

$\log_3 16 - \log_3 64$ obliczamy potęgi

$\log_3\left(\frac{16}{64}\right)$ korzystamy ze wzoru $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_3\left(\frac{1}{4}\right)$ eliminujemy odp. A

$\log_3\left(4^{-1}\right)$ korzystamy ze wzoru $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

$-1 \cdot \log_3 4$

$-1 \cdot \log_3 2^2$ korzystamy ze wzoru $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

$-1 \cdot 2 \cdot \log_3 2 = -2\log_3 2$.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

$4\log_3 2 - 3\log_3 4 = 4\log_3 2 - 3\log_3 2^2 = 4\log_3 2 - 3 \cdot 2\log_3 2 = 4\log_3 2 - 6\log_3 2 = -2\log_3 2$

2.37.

$2\log_4 3 - \log_4 9$ korzystamy ze wzoru $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_4 3^2 - \log_4 9$ obliczamy potęgę $3^2 = 9$

$\log_4 9 - \log_4 9 = \mathbf{0}$.

Odp. **A**

2.38.

$\log_6 54 - 2\log_6 3$ korzystamy ze wzoru $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_6 54 - \log_6 3^2$ obliczamy potęgę $3^2 = 9$

$\log_6 54 - \log_6 9$ korzystamy ze wzoru $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_6 \left(\frac{54}{9}\right) = \log_6 6 = \mathbf{1}$.

Odp. **A**

2.39.

$\log_2 18 - 2\log_2 6$ korzystamy ze wzoru $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_2 18 - \log_2 6^2$ obliczamy potęgę $6^2 = 36$

$\log_2 18 - \log_2 36$ korzystamy ze wzoru $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_2 \left(\frac{18}{36}\right)$

$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$ $\log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$2^x = \frac{1}{2} \quad \to \quad 2^x = 2^{-1} \quad \to \quad x = \mathbf{-1}$.

Odp. **D**

2.40.

$\log_6 8 + 3\log_6 3$ korzystamy ze wzoru $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_6 8 + \log_6 3^3$ obliczamy potęgę $3^3 = 27$

$\log_6 8 + \log_6 27$ korzystamy ze wzoru $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

$\log_6 (8 \cdot 27)$ obliczamy $8 \cdot 27 = 216$

$\log_6 216 = x$ $\log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$

$6^x = 6^3 \quad \to \quad x = \mathbf{3}$.

Odp. **D**

2.41.
Należy obliczyć $5+\log_2 3$.

$5+\log_2 3$ — zapisujemy 5 jako logarytm o podstawie 2, dlatego właśnie 2, żeby uzyskać tę samą podstawę co w $\log_2 3$, co pozwoli zastosować później wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$.

$\underbrace{\log_2 2^5}_{5}+\log_2 3$ — obliczamy potęgę $2^5=32$

$\log_2 32+\log_2 3$ — stosujemy wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$

$\log_2(32\cdot 3)=\log_2 96$.

Odp. **D**

2.42.

$\log_5 250$ — rozkładamy liczbę 250 na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\log_5\underbrace{(5\cdot 5\cdot 5\cdot 2)}_{250}$ — stosujemy wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$

$\underbrace{\log_5 5}_{1}+\underbrace{\log_5 5}_{1}+\underbrace{\log_5 5}_{1}+\log_5 2 = \mathbf{3+\log_5 2}$ — stosujemy wzór $\log_a a=1$

Odp. **D**

2.43.
Należy obliczyć $\log 20-1$ mając na uwadze to, że $\log 20=\log_{10} 20$.

$\log_{10} 20-1$ — przedstawiamy 1 jako $\log_{10} 10^1$

$\log_{10} 20-\underbrace{\log_{10} 10^1}_{1}$

$\log_{10} 20-\log_{10} 10$ — wykorzystujemy wzór $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right)=\log_{10} 2=\mathbf{\log 2}$.

Odp. **B**

2.44.
Sprawdzamy po kolei odpowiedzi:

A. $\log_4 16 - \log_4 13$ — wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_4\left(\frac{16}{13}\right) \neq \log_4 3$

B. $2\log_4 6 - \log_4 12$ — wykorzystujemy wzór $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_4 6^2 - \log_4 12$ — obliczamy potęgę $6^2 = 36$

$\log_4 36 - \log_4 12$ — wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_4\left(\frac{36}{12}\right) = \mathbf{\log_4 3}$.

Odp. **B**

2.45.

$2\log_6 2$ — wykorzystujemy wzór $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$

$\log_6 2^2 = \mathbf{\log_6 4}$

Sprawdzamy po kolei odpowiedzi:

A. $2 - \log_6 9$ — wykorzystujemy wzór $r = \log_a a^r$ dla $r = 2$, $a = 6$

$\underbrace{\log_6 6^2}_{2} - \log_6 9$ — obliczamy potęgę $6^2 = 36$

$\log_6 36 - \log_6 9$ — wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_6\left(\frac{36}{9}\right) = \mathbf{\log_6 4}$

Odp. **A**

2.46.

$a_{23} = 2018 + \log_3(23+1) = 2018 + \log_3 24$, $\quad a_7 = 2018 + \log_3(7+1) = 2018 + \log_3 7$

$a_{23} - a_7 = 2018 + \log_3 24 - (2018 + \log_3 8) = 2018 + \log_3 24 - 2018 - \log_3 8 =$

$= \log_3 24 - \log_3 8 = \log_3 \frac{24}{8} = \log_3 3 = 1$, 1 jest liczbą wymierną.

Odp. **D**

Uwaga ! Logarytm $\log_a a = 1$ dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, różnej od jedynki, np. $\log_4 4 = 1$, $\log_{0,2} 0{,}2 = 1$, $\log_{6\pi\sqrt{7}} 6\pi\sqrt{7} = 1$, itp.

2.47.
Najpierw liczymy a_3, aby sprawdzić prawdziwość odpowiedzi A i B.
$a_3 = \log_2(10+2\cdot 3)$
$\log_2(10+6)$
$\log_2 16 = x$ $\qquad\qquad \log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$
$2^x = 16 \quad \to \quad 2^x = 2^4 \quad \to \quad x = \mathbf{4}$.
Zatem $a_3 = \mathbf{4}$. Odrzucamy odpowiedzi A i B.

Liczymy a_{11}:
$a_{11} = \log_2(10+2\cdot 11)$
$\log_2(10+22)$
$\log_2 32 = x$
$2^x = 32 \quad \to \quad 2^x = 2^5 \quad \to \quad x = \mathbf{5}$. Zatem $a_{11} = \mathbf{5}$.
Odp. **C**

2.48.
Obliczamy $a_9 = \log_4(11\cdot 9 - 35) = \log_4(99-35) = \log_4 64 = x$.
$4^x = 64 \quad \to \quad 4^x = 4^3 \quad \to \quad x = \mathbf{3}$.
Odp. **A**

2.49.
Obliczamy najpierw a_1:
$a_1 = 6 + \log_2(24\cdot 1 - 16) = 6 + \log_2 8 = 6 + \log_2 2^3 = 6+3 = 9$.
Obliczamy a_2:
$a_2 = 6 + \log_2(24\cdot 2 - 16) = 6 + \log_2 32 = 6 + \log_2 2^5 = 6+5 = 11$.
Zatem $a_1 + a_2 = 9 + 11 = \mathbf{20}$.
Odp. **B**

2.50.
$a_n = \log\left(\frac{1}{n}\right)$ to inaczej $a_n = \log_{10}\left(\frac{1}{n}\right)$. Obliczamy a_{100}:
$a_{100} = \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = x$
$10^x = \frac{1}{100} \quad \to \quad 10^x = \frac{1}{10^2} \quad \to \quad 10^x = 10^{-2} \quad \to \quad x = \mathbf{-2}$.
Zatem $a_{100} = -2$, więc spełniony jest warunek $\underbrace{a_{100}}_{-2} < -1$.

Odp. **A**

2.51.

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{2+\log_6 3+\log_6 2}{3}=\frac{2+\log_6(3\cdot 2)}{3}=\frac{2+\log_6 6}{3}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Odp. **A**

Uwaga! W liczniku zastosowano wzór $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$.

2.52.

$a=\log 20,\ b=\log 5$ to inaczej $a=\log_{10} 20,\ b=\log_{10} 5$.

$$\frac{a+b}{2}=\frac{\log_{10} 20+\log_{10} 5}{2}=\frac{\log_{10}(20\cdot 5)}{2}=\frac{\log_{10} 100}{2}=\frac{\log_{10} 10^2}{2}=\frac{2\log_{10} 10}{2}=\log_{10} 10=\mathbf{1}.$$

Odp. **D**

2.53.

Logarytmy liczymy osobno, bo mają różne podstawy.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)=a$ korzystamy z definicji logarytmu

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{8} \quad \to \quad \left(2^{-1}\right)^a=\frac{1}{2^3} \quad \to \quad 2^{-a}=2^{-3} \quad \to \quad -a=-3 \quad \to \quad a=3$

$\log_3\left(\frac{1}{81}\right)=b$ korzystamy z definicji logarytmu

$3^b=\frac{1}{81} \quad \to \quad 3^b=\frac{1}{3^4} \quad \to \quad 3^b=3^{-4} \quad \to \quad b=-4$.

Obliczamy średnią arytmetyczną: $\frac{a+b}{2}=\frac{3+(-4)}{2}=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

2.54.

$$\frac{a+b}{2}=\frac{6+\log_6 8+\log_6 27}{2}=\frac{6+\log_6(8\cdot 27)}{2}=\frac{6+\log_6 216}{2}=\frac{6+\log_6 6^3}{2}=\frac{6+3}{2}=\frac{9}{2}=\mathbf{4{,}5}.$$

Odp. **C**

2.55.

Logarytmy liczymy osobno (z definicji logarytmu), bo mają różne podstawy:

$\log_4 64=a$

$4^a=64 \quad \to \quad 4^a=4^3 \quad \to \quad a=3$.

$\log_3 9=b$

$3^b=9 \quad \to \quad 3^b=3^2 \quad \to \quad b=2$.

$\log_{25} 5=c$

$25^c=5 \quad \to \quad \left(5^2\right)^c=5^1 \quad \to \quad 5^{2c}=5^1 \quad \to \quad 2c=1 \quad \to \quad c=0{,}5$.

Liczymy średnią arytmetyczną: $\frac{a+b+c}{3}=\frac{3+2+0{,}5}{3}=\frac{5{,}5}{3}\approx \mathbf{1{,}833}...$

Przybliżenie $1\frac{5}{6}=1+\frac{5}{6}\approx 1+0{,}833...=\mathbf{1{,}833}...$

Odp. **D**

2.56.

$\log_2 x - \log_2 y = 5$ wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 5$ korzystamy z definicji logarytmu

$2^5 = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad 32 = \frac{x}{y}$ odrzucamy w ten sposób odp. C

Jeśli $\frac{32}{1} = \frac{x}{y}$, to musi być $\frac{1}{32} = \frac{y}{x}$.

Odp. **D**

2.57.

$\log_{10} x + \log_{10} y + \log_{10} z = 1$ wykorzystujemy wzór $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$

$\log_{10}(x \cdot y \cdot z) = 1$ wykorzystujemy definicję logarytmu

$10^1 = x \cdot y \cdot z \quad \rightarrow \quad xyz = \mathbf{10}$.

Odp. **C**

2.58.

$\log_4 b + \log_4 c = 4$ wykorzystujemy wzór $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$

$\log_4(b \cdot c) = 4$ wykorzystujemy definicję logarytmu

$4^4 = b \cdot c \quad \rightarrow \quad b \cdot c = \mathbf{256}$.

Odp. **C**

2.59.

$\log_3 a + \log_3 b = 0$ wykorzystujemy wzór na sumę logarytmów

$\log_3(a \cdot b) = 0$ korzystamy z definicji logarytmu

$3^0 = a \cdot b \quad \rightarrow \quad a \cdot b = \mathbf{1}$

Każda niezerowa liczba, podniesiona do potęgi 0-wej, jest równa 1. W szczególności, $3^0 = 1$.

Odp. **B**

2.60.

$\log_3 x - \log_3 y = 2$ wykorzystujemy wzór $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_3\left(\frac{x}{y}\right) = 2$ korzystamy z definicji logarytmu

$3^2 = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \mathbf{9}$.

Odp. **B**