6.1.

Przyrównujemy każdy czynnik do zera i rozwiązujemy równania:

$5x^2=0 \quad \|:5$	$2x-2=0$	$5-5x^2=0$	$x+25=0$	$x^2+4=0$
$x^2=0$	$2x=2 \quad \|:2$	$-5x^2=-5 \|:(-5)$	$x=\mathbf{-25}$	$x^2=-4$
$x=\mathbf{0}$	$x=\mathbf{1}$	$x^2=1$		równanie sprzeczne (liczba dodatnia x^2 nie może być równa liczbie ujemnej –4)
		$x=\sqrt{1}$ lub $x=-\sqrt{1}$		
		$x=\mathbf{1}$ lub $x=\mathbf{-1}$		

Rozwiązaniami równania są: $x=\mathbf{0}$, $x=\mathbf{1}$, $x=\mathbf{-1}$, $x=\mathbf{-25}$.

Odp. **B**

Zapamiętaj !

Równanie $x^2=a$

dla $a>0$	dla $a=0$	dla $a<0$
ma dwa różne rozwiązania $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ np. $x^2=5$ $x=\sqrt{\mathbf{5}}$, $x=-\sqrt{\mathbf{5}}$	ma jedno rozwiązanie $x=0$ np. $x^2=0$ $x=\mathbf{0}$	nie ma rozwiązań rzeczywistych np. $x^2=-9$ równanie sprzeczne

6.2.

$3x = 0 \quad |:3$ $x = \mathbf{0}$	$8x - 4 = 0$ $8x = 4 \quad |:8$ $x = \frac{4}{8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$2x^2 - 8 = 0$ $2x^2 = 8 \quad |:2$ $x^2 = 4$ $x = \sqrt{4}$ lub $x = -\sqrt{4}$ $x = \mathbf{2}$ lub $x = \mathbf{-2}$	$x + 2 = 0$ $x = -\mathbf{2}$

Rozwiązaniami równania są: $x = \mathbf{0}$, $x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, $x = \mathbf{2}$, $x = \mathbf{-2}$.

Odp. **A**

6.3.

$x = \mathbf{0}$	$x - 1 = 0$ $x = \mathbf{1}$	$x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$ równanie sprzeczne	$2x^2 + 18 = 0$ $2x^2 = -18 \;\; \vert : 2$ $x^2 = -9$ równanie sprzeczne

Równanie ma 2 różne rozwiązania rzeczywiste: $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{1}$.

Odp. **A**

6.4.

$x^2+9=0$

$x^2=-9$

równanie sprzeczne

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\sqrt{4}$ lub $x=-\sqrt{4}$

$x=\mathbf{2}$ lub $x=\mathbf{-2}$

$x-4=0$

$x=\mathbf{4}$

Równanie $(x^2+9)(x^2-4)(x-4)=0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste: $x=\mathbf{2}$, $x=\mathbf{-2}$, $x=\mathbf{4}$.

Odp. **C**

6.5.

$x^2 = 0$	$9 - x^2 = 0$	$x - 3 = 0$
$x = \mathbf{0}$	$-x^2 = -9 \ \vert : (-1)$	$x = \mathbf{3}$
	$x^2 = 9$	
	$x = \sqrt{9}$ lub $x = -\sqrt{9}$	
	$x = \mathbf{3}$ lub $x = \mathbf{-3}$	

Równanie $x^2(9 - x^2)(x - 3) = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste: $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{3}$, $x = \mathbf{-3}$.
Odp. **C**

6.6.

Przyrównujemy każdy czynnik do zera i rozwiązujemy równania:

$7=0$ sprzeczność	$5x^3+40=0$ $5x^3=-40 \,\vert : 5$ $x^3=-8$ $x=\sqrt[3]{-8}$ $x=\mathbf{-2}$	$x-2=0$ $x=\mathbf{2}$	$7-x^3=0$ $-x^3=-7 \,\vert : (-1)$ $x^3=7$ $x=\sqrt[3]{\mathbf{7}}$	$x-\sqrt{5}=0$ $x=\sqrt{\mathbf{5}}$

Rozwiązaniami równania są: $x=-2,\ x=2,\ x=\sqrt[3]{7},\ x=\sqrt{5}$.

Odp. **B**

Zapamiętaj !

Każde równanie postaci $x^3=a$ ma **dokładnie jedno** rozwiązanie rzeczywiste.

Np. $x^3=64 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{64} \quad \rightarrow \quad x=4$

$x^3=10 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{10}$

$x^3=0 \quad \rightarrow \quad x=0$

$x^3=-57 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{-57}$

$x^3=-8 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{-8} \quad \rightarrow \quad x=-2$

6.7.

$2x = 0 \quad \vert : 2$	$x^3 - 27 = 0$	$4 + x^2 = 0$	$x - 1 = 0$
$x = \mathbf{0}$	$x^3 = 27$	$x^2 = -4$	$x = \mathbf{1}$
	$x = \sqrt[3]{27}$	równanie sprzeczne	
	$x = \mathbf{3}$		

Równanie $2x(x^3 - 27)(4 + x^2)(x - 1) = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste: $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{3}$, $x = \mathbf{1}$.
Odp. **C**

6.8.

$64 - x^3 = 0$

$-x^3 = -64 \quad |:(-1)$

$x^3 = 64$

$x = \sqrt[3]{64} \quad \rightarrow \quad x = \mathbf{4}$

$x - 4 = 0$

$x = \mathbf{4}$

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

równanie sprzeczne

Równanie $(64 - x^3)(x-4)(x^2+9) = 0$ ma **jedno** rozwiązanie rzeczywiste $x = 4$.

Odp. **A**

6.9.

$x = \mathbf{0}$	$2 - x^3 = 0$ $-x^3 = -2 \mid :(-1)$ $x^3 = 2$ $x = \sqrt[3]{\mathbf{2}}$	$x^2 - 2 = 0$ $x^2 = 2$ $x = \sqrt{\mathbf{2}}$ lub $x = -\sqrt{\mathbf{2}}$	$x - 2 = 0$ $x = \mathbf{2}$

Równanie ma **pięć** rozwiązań rzeczywistych: $x = \mathbf{0}$, $x = \sqrt[3]{\mathbf{2}}$, $x = \sqrt{\mathbf{2}}$, $x = -\sqrt{\mathbf{2}}$, $x = \mathbf{2}$.
Odp. **D**

6.10.

$6=0$ sprzeczność	$x-\sqrt{2}=0$ $x=\sqrt{\mathbf{2}}$	$x^2+3=0$ $x^2=-3$ równanie sprzeczne	$x^2+2=0$ $x^2=-2$ równanie sprzeczne

Równanie ma jedno rozwiązanie rzeczywiste: $x=\sqrt{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

6.11.

Przyrównujemy każdy czynnik do zera i rozwiązujemy równania:

$3=0$

sprzeczność

$$x^2-3x+1=0$$
$$a=1,\ b=-3,\ c=1,\quad -b=3$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2\cdot1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x^3+\sqrt{2}=0$$
$$x^3=-\sqrt{2}$$
$$x=\sqrt[3]{-\sqrt{2}}$$

Rozwiązaniami równania są: $x=\frac{\mathbf{3-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$, $x=\frac{\mathbf{3+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$, $x=\sqrt[3]{-\sqrt{\mathbf{2}}}$.

Korzystając z kalkulatora, przybliżamy $\sqrt{5}\approx 2{,}24$, $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ aby ocenić, które rozwiązania są ujemne.

$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx\frac{3-2{,}24}{2}=\frac{0{,}76}{2}=0{,}38>0$, $\quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx\frac{3+2{,}24}{2}=\frac{5{,}24}{2}=2{,}62>0$

$x=\sqrt[3]{-\sqrt{2}}\approx\sqrt[3]{-1{,}41}<0$

Zatem istnieje tylko jedno rozwiązanie ujemne: $x=\sqrt[3]{-\sqrt{\mathbf{2}}}$.

Odp. **D**

6.12.

$4=0$ sprzeczność	$x^3-27=0$ $x^3=27$ $x=\sqrt[3]{27}$ $x=\mathbf{3}$	$x+9=0$ $x=-\mathbf{9}$	$x^2+1=0$ $x^2=-1$ równanie sprzeczne

Równanie $4\left(x^3-27\right)\left(x+9\right)\left(x^2+1\right)=0$ ma **jedno ujemne** rozwiązanie: $x=-\mathbf{9}$.

Odp. **B**

6.13.

$x=\mathbf{0}$	$x^2+x=0$ $x(x+1)=0$ $x=0$ lub $x+1=0$ $x=\mathbf{0}$ lub $x=\mathbf{-1}$	$x-x^2=0$ $x(1-x)=0$ $x=0$ lub $1-x=0$ $x=0$ lub $-x=-1 \quad \mid :(-1)$ $x=\mathbf{0}$ lub $x=\mathbf{1}$

Równanie ma **jedno dodatnie** rozwiązanie rzeczywiste: $x=\mathbf{1}$.
Odp. **A**

6.14.

$3x^2 - 12x = 0$	$x^2 - 2x - 4 = 0$	$x - 1 = 0$
$x(3x-12) = 0$	$a = 1,\ b = -2,\ c = -4 \qquad -b = 2$	$x = \mathbf{1}$
$x = 0$ lub $3x - 12 = 0$	$\Delta = b^2 - 4ac$	
$x = 0$ lub $3x = 12 \quad \|:3$	$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)$	
$x = \mathbf{0}$ lub $x = \mathbf{4}$	$\Delta = 4 + 16 = 20$	
	$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20}$	
	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\mathbf{2-\sqrt{20}}}{\mathbf{2}}$	
	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\mathbf{2+\sqrt{20}}}{\mathbf{2}}$	

Ponieważ $\sqrt{20} \approx 4{,}47$, to $x_1 = \frac{2-4{,}47}{2} = \frac{-2{,}47}{2} = \mathbf{-1{,}235}$ jest ujemnym rozwiązaniem,

zaś $x_2 \approx \frac{2+4{,}47}{2} = \frac{6{,}47}{2} = \mathbf{3{,}235}$ jest dodatnim rozwiązaniem.

Równanie ma **trzy dodatnie** rozwiązania: $x = \mathbf{4}$, $x = \frac{\mathbf{2+\sqrt{20}}}{\mathbf{2}}$, $x = \mathbf{1}$.

Odp. **D**

6.15.

$x^3 + 2019 = 0$

$x^3 = -2019$

$x = \sqrt[3]{-\mathbf{2019}}$

$x^2 - 2019 = 0$

$x^2 = 2019$

$x = \sqrt{\mathbf{2019}}$ lub $x = -\sqrt{\mathbf{2019}}$

Równanie ma dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie rzeczywiste: $x = \sqrt{\mathbf{2019}}$.

Odp. **B**

6.16.

$x^4 = 0$ $x = \mathbf{0}$	$27x^3 - 8 = 0$ $27x^3 = 8 \ \vert : 27$ $x^3 = \frac{8}{27}$ $x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$	$32 - x^5 = 0$ $-x^5 = -32 \ \vert : (-1)$ $x^5 = 32$ $x = \sqrt[5]{32}$ $x = \sqrt[5]{2^5} = \mathbf{2}$	$24 - 2x^3 = 0$ $-2x^3 = -24 \ \vert : (-2)$ $x^3 = 12$ $x = \mathbf{\sqrt[3]{12}}$
$x^2 - 3 = 0$ $x^2 = 3$ $x = \mathbf{\sqrt{3}}$ lub $x = \mathbf{-\sqrt{3}}$	$2 - 3x = 0$ $-3x = -2 \ \vert : (-3)$ $x = \mathbf{\frac{2}{3}}$	$4x + 7 = 0$ $4x = -7 \ \vert : 4$ $x = -\mathbf{\frac{7}{4}}$	$2x^7 + 2 = 0$ $2x^7 = -2 \ \vert : 2$ $x^7 = -1$ $x = \sqrt[7]{-1} = \sqrt[7]{-1^7} = \mathbf{-1}$

Rozwiązaniami równania są:

$x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{\frac{2}{3}}$, $x = \mathbf{2}$, $x = \mathbf{\sqrt[3]{12}}$, $x = \mathbf{\sqrt{3}}$, $x = \mathbf{-\sqrt{3}}$, $x = -\mathbf{\frac{7}{4}}$, $x = \mathbf{-1}$.

Spośród wszystkich rozwiązań wybieramy rozwiązania wymierne.

Przypomnienie: liczba wymierna to taka, która da się zapisać w postaci ułamka zwykłego $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi oraz $b \neq 0$. Liczby całkowite to np. –4, 5, –8, 0, –5 itp.

Liczby $\frac{2}{3}$ i $-\frac{7}{4}$ spełniają założenia liczby całkowitej. Liczby 0, 2 oraz –1 da się zapisać jako liczba wymierna, np. $0 = \frac{0}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $-1 = \frac{-1}{1}$, zatem też są to liczby wymierne. Pozostałe liczby: $\sqrt[3]{12}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ są niewymierne.

Zatem rozwiązania: $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{\frac{2}{3}}$, $x = \mathbf{2}$, $x = -\mathbf{\frac{7}{4}}$, $x = \mathbf{-1}$ są wymierne.

Odp. **C**

6.17.

$x = \mathbf{0}$

$$3x^2 - 4 = 0$$
$$3x^2 = 4 \quad |:3$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$
$$x = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

$$x - \sqrt{3} = 0$$
$$x = \sqrt{\mathbf{3}}$$

Równanie ma **tylko jedno** rozwiązanie wymierne, którym jest $x = \mathbf{0}$.

Odp. **B**

6.18.

$4=0$ sprzeczność	$3x-4x^2=0$ $x(3-4x)=0$ $x=0$ lub $3-4x=0$ $x=0$ lub $-4x=-3 \quad \vert :(-4)$ $x=\mathbf{0}$ lub $x=\mathbf{\frac{3}{4}}$	$x^3-6=0$ $x^3=6$ $x=\sqrt[3]{\mathbf{6}}$

Równanie ma **dwa** rozwiązania **wymierne**: $x=\mathbf{0}$, $x=\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Odp. **B**

6.19.

$5 = 0$

sprzeczność

$$x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$a = 1,\ b = -10,\ c = 3, \quad -b = 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 100 - 12 = 88$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{88}$$

$$x_1 = \frac{\mathbf{10 - \sqrt{88}}}{\mathbf{2}},\ x_2 = \frac{\mathbf{10 + \sqrt{88}}}{\mathbf{2}}$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$

$$x = \mathbf{1}$$

Jedynym wymiernym rozwiązaniem równania jest $x = \mathbf{1}$.

Odp. **A**

6.20.

$x^5 - 5 = 0$	$x^7 + 7 = 0$	$x^9 - 9 = 0$
$x^5 = 5$	$x^7 = -7$	$x^9 = 9$
$x = \boldsymbol{\sqrt[5]{5}}$	$x = \boldsymbol{\sqrt[7]{-7}}$	$x = \boldsymbol{\sqrt[9]{9}}$

Równanie **nie ma wymiernych** rozwiązań.
Odp. **A**

6.21.

$x+2=0$	$x^3+4=0$	$32-2x^4=0$	$x^2-4=0$	$x^6+36=0$
$x=\mathbf{-2}$	$x^3=-4$	$-2x^4=-32 \;\vert : (-2)$	$x^2=4$	$x^6=-36$
	$x=\sqrt[3]{\mathbf{-4}}$	$x^4=16$	$x=\sqrt{4}$ lub $x=-\sqrt{4}$	równanie sprzeczne
		$x=\sqrt[4]{16}$ lub $x=-\sqrt[4]{16}$	$x=\mathbf{2}$ lub $x=\mathbf{-2}$	
		$x=\mathbf{2}$ lub $x=\mathbf{-2}$		

Spośród rozwiązań równania, **niewymierne** jest tylko **jedno**: $x=\sqrt[3]{\mathbf{-4}}$.

Odp. **A**

6.22.

$x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3$

równanie sprzeczne

$x - \frac{1}{2} = 0$

$x = \mathbf{\frac{1}{2}}$

Równanie ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = \mathbf{\frac{1}{2}}$, które jest **wymierne**.

Równanie **nie ma** rozwiązań **niewymiernych**.

Odp. **D**

6.23.

$4=0$ sprzeczność	$x^2+2x+3=0$ $a=1,\ b=2,\ c=3,\quad -b=-2$ $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8$ $\Delta=-8$ równanie sprzeczne	$x^4+4=0$ $x^4=-4$ równanie sprzeczne

Równanie **nie ma rozwiązań** rzeczywistych.
Odp. **A**

6.24.

$2x^2 + 6x + 4 = 0$

$a = 2,\ b = 6,\ c = 4, \quad -b = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{-8}{4} = \mathbf{-2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = \mathbf{-1}$$

Odp. **C**

6.25.

$1000 - x^3 = 0$

$-x^3 = -1000 \quad |:(-1)$

$x^3 = 1000$

$x = \sqrt[3]{1000}$

$x = \mathbf{10}$

$100 - x^2 = 0$

$-x^2 = -100 \quad |:(-1)$

$x^2 = 100$

$x = \sqrt{100}$ lub $x = -\sqrt{100}$

$x = \mathbf{10}$ lub $x = \mathbf{-10}$

$10 - x = 0$

$-x = -10 \quad |:(-1)$

$x = \mathbf{10}$

Równanie ma **dwa** rozwiązania **wymierne**: $x = \mathbf{10}$, $x = \mathbf{-10}$,
ale **nie ma żadnego** rozwiązania **niewymiernego**.
Odp. **D**

6.26.

$x+3=0$ $x=\mathbf{-3}$	$x-x^2=0 \rightarrow x(1-x)=0 \rightarrow x=0$ lub $1-x=0$ $x=\mathbf{0}$ lub $x=\mathbf{1}$	$x^4-9=0$ $x^4=9$ $x=\sqrt[4]{\mathbf{9}}$ lub $x=-\sqrt[4]{\mathbf{9}}$

Rozwiązaniami równania są: $x=\mathbf{-3},\ x=\mathbf{0},\ x=\mathbf{1},\ x=\sqrt[4]{\mathbf{9}},\ x=-\sqrt[4]{\mathbf{9}}$.
Rozwiązania **nieujemne** to takie, które **nie są** liczbami **ujemnymi**.
(Analogicznie, rozwiązania **niedodatnie** to takie, które **nie są** liczbami **dodatnimi**)
Stąd wynika, że **0** jest zaliczane **zarówno** do liczb **nieujemnych** i **niedodatnich**.

Liczba 0 jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia

Zatem rozwiązania nieujemne to: $x=\mathbf{1},\ x=\mathbf{0},\ x=\sqrt[4]{\mathbf{9}}$.
Odp. **C**

6.27.

$3x=0 \quad \mid :3$ $x=\mathbf{0}$	$x^3+8=0$ $x^3=-8$ $x=\sqrt[3]{-8}$ $x=\mathbf{-2}$	$x+\sqrt{14}=0$ $x=-\sqrt{\mathbf{14}}$

Liczba 0 jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia

Równanie ma **trzy** rozwiązania **niedodatnie**:
$x=\mathbf{0},\ x=\mathbf{-2},\ x=-\sqrt{\mathbf{14}}$.
Odp. **B**

6.28.

$3x+5=0$ $3x=-5 \quad \mid :3$ $x=-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$	$5x+3=0$ $5x=-3 \quad \mid :5$ $x=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$	$3x^2+5=0$ $3x^2=-5 \quad \mid :3$ $x^2=-\dfrac{5}{3}$ równanie sprzeczne	$5x^2+3=0$ $5x^2=-3 \quad \mid :5$ $x^2=-\dfrac{3}{5}$ równanie sprzeczne

Równanie $(3x+5)(5x+3)(3x^2+5)(5x^2+3)=0$ ma **dwa rozwiązania** rzeczywiste.
Oba rozwiązania są **niedodatnie**.
Odp. **A**

6.29.

$10x = 0 \quad \|:10$	$x + 1 = 0$	$x - 2 = 0$	$x + 3 = 0$
$x = \mathbf{0}$	$x = \mathbf{-1}$	$x = \mathbf{2}$	$x = \mathbf{-3}$

Równanie ma cztery rozwiązania. **Dokładnie 3** z nich są **niedodatnie**: $x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{-1},\ x = \mathbf{-3}$.

Odp. **C**

$\boxed{\text{Liczba } 0 \text{ jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia}}$

6.30.

$3 = 0$
sprzeczność

$x - x^2 = 0 \rightarrow x(1-x) = 0 \rightarrow x = 0 \ \text{ lub } \ 1 - x = 0$

$x = 0 \ \text{ lub } \ -x = -1 \ \|:(-1)$

$x = \mathbf{0} \ \text{ lub } \ x = \mathbf{1}$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{\mathbf{2}} \ \text{ lub } \ x = -\sqrt{\mathbf{2}}$

Równanie ma cztery rozwiązania:
$x = \mathbf{0},\ x = \mathbf{1},\ x = \sqrt{\mathbf{2}},\ x = -\sqrt{\mathbf{2}}$.

Dokładnie **2** z nich są **niedodatnie**: $x = \mathbf{0},\ x = -\sqrt{\mathbf{2}}$.

Odp. **B**

$\boxed{\text{Liczba } 0 \text{ jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia}}$

6.31.

Zaczynamy od założenia zapobiegającego dzieleniu przez zero (mianownik różny od zera):

$4x+8\neq 0$	$x^2-16\neq 0$
$4x\neq -8 \quad \vert :4$	$x^2\neq 16$
$x\neq -2$	$x\neq \sqrt{16}\ i \quad x\neq -\sqrt{16}$
	$x\neq 4 \quad i \quad x\neq -4$

To właśnie stąd wzięły się założenia $x\neq -2$ i $x\neq \pm 4$, podane w treści zadania.

Następnie przyrównujemy do zera każde z wyrażeń w liczniku i rozwiązujemy równania:

$3=0$	$64+x^3=0$	$4x-x^2=0$	$3x^2-12=0$
sprzeczność	$x^3=-64$	$x(4-x)=0$	$3x^2=12 \quad \vert :3$
	$x=\sqrt[3]{-64}$	$x=0$ lub $\quad 4-x=0$	$x^2=4$
	$x=\sqrt[3]{-4^3}$	$x=0$ lub $\ -x=-4 \ \vert :(-1)$	$x=\sqrt{4}$ lub $x=-\sqrt{4}$
	$x=\mathbf{-4}$	$x=\mathbf{0}$ lub $\ x=\mathbf{4}$	$x=\mathbf{2}$ lub $x=\mathbf{-2}$

Liczby: $x=-4,\ x=0,\ x=4,\ x=2,\ x=-2$ **mogą** być rozwiązaniami równania.

Jednak z wcześniejszych założeń wynika, że $x\neq -2,\ x\neq 4,\ x\neq -4$. Oznacza to, że:

rozwiązaniami równania **są wyłącznie** $x=0,\ x=2$.

Odp. **C**

6.32.
Zaczynamy od założenia (mianownik różny od zera):

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq 2 \quad i \quad x \neq -2$

Teraz rozwiązujemy równanie (przyrównujemy każdy z nawiasów w liczniku osobno do zera)

$x^3 + 8 = 0$	$x^3 - 8 = 0$
$x^3 = -8$	$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{-8}$	$x = \sqrt[3]{8}$
$x = \mathbf{-2}$	$x = \mathbf{2}$

Jednak żadna z liczb **mogących** być rozwiązaniem: $x = \mathbf{-2}$, $x = \mathbf{2}$ nie będzie rozwiązaniem, ponieważ mamy założenia $x \neq 2 \quad i \quad x \neq -2$.
Odp. **A**

6.33.
Zaczynamy od założenia (mianownik różny od zera):

$x^3 + 27 \neq 0$

$x^3 \neq -27$

$x \neq \sqrt[3]{-27} \quad \rightarrow \quad x \neq -3$

Rozwiązujemy równanie:

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$a = 1,\ b = 6,\ c = 9, \qquad -b = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = \mathbf{-3}$

Liczba $x = \mathbf{-3}$ **może** być rozwiązaniem równania, ale nim **nie będzie** ze względu na wcześniejsze założenie $x \neq -3$.
Odp. **A**

6.34.

Zaczynamy od założenia (mianownik różny od zera): $x-2\neq 0$, więc $x\neq 2$.

Rozwiązujemy równanie:

$x+2=0$	$2x-4=0$	$3x+8=0$	$4x-16=0$
$x=\mathbf{-2}$	$2x=4 \quad \vert :2$	$3x=-8 \quad \vert :3$	$4x=16 \quad \vert :4$
	$x=\mathbf{2}$	$x=-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$	$x=\mathbf{4}$

Liczba $x=2$ nie może być rozwiązaniem, ze względu na początkowe założenie $x\neq 2$.

Równanie ma trzy rozwiązania $x=\mathbf{-2},\ x=-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}},\ x=\mathbf{4}$.

Wśród nich, **dodatnie** jest tylko **jedno**: $x=\mathbf{4}$.

Odp. **A**

6.35.

Zaczynamy od założenia (mianownik różny od zera):

$2x^2-16\neq 0 \qquad |:2$

$x^2-8\neq 0$

$x^2\neq 8$

$x\neq\sqrt{8} \quad i \quad x\neq-\sqrt{8}$

Rozwiązujemy równanie:

$x^3-8=0$	$x^2-8=0$	$x+\sqrt{7}=0$	$3x^2+5=0$
$x^3=8$	$x^2=8$	$x=-\sqrt{\mathbf{7}}$	$3x^2=-5 \quad \vert :3$
$x=\sqrt[3]{8}$	$x=\sqrt{\mathbf{8}}$ lub $x=-\sqrt{\mathbf{8}}$		$x^2=-\dfrac{5}{3}$
$x=\mathbf{2}$			równanie sprzeczne

Liczby $x=\sqrt{\mathbf{8}}$ oraz $x=-\sqrt{\mathbf{8}}$ nie mogą być rozwiązaniami ze względu na początkowe założenie $x\neq\sqrt{8}\ i\ x\neq-\sqrt{8}$.

Zatem równanie ma **2** różne rozwiązania: $x=2,\ x=-\sqrt{7}$, w tym **jedno niewymierne** którym jest $x=-\sqrt{7}$.

Odp. **D**

6.36.

Ze względu na dzielenie przez zero zakładamy, że $x-3\neq 0$, czyli $x\neq 3$.

Następnie przyrównujemy każdy czynnik w liczniku do zera i rozwiązujemy równania:

$x=\mathbf{0}$	$x-2=0$	$x^4-81=0$	$1+x^2=0$
	$x=\mathbf{2}$	$x^4=81$	$x^2=-1$
		$x=\sqrt[4]{81}$ lub $x=-\sqrt[4]{81}$	równanie sprzeczne
		$x=\mathbf{3}$ lub $x=\mathbf{-3}$	

Liczby: $x=0,\ x=2,\ x=3,\ x=-3$ **mogą** być rozwiązaniami równania, jednak ze względu na założenie $x\neq 3$, rozwiązaniami będą jedynie $x=\mathbf{0},\ x=\mathbf{2},\ x=\mathbf{-3}$. Obliczamy iloczyn tych liczb: $0\cdot 2\cdot(-3)=0$.

Odp. **C**

6.37.

$x+1=0$	$x-2=0$	$x+5=0$
$x=\mathbf{-1}$	$x=\mathbf{2}$	$x=\mathbf{-5}$

Rozwiązaniami równania są liczby: $x=\mathbf{-1},\ x=\mathbf{2},\ x=\mathbf{-5}$.

Obliczamy sumę rozwiązań: $S=-1+2+(-5)=-1+2-5=\mathbf{-4}$.

Odp. **A**

6.38.

Rozwiązanie I:

$x^4-3=0 \quad\rightarrow\quad x^4=3 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt[4]{\mathbf{3}}$ lub $x=-\sqrt[4]{\mathbf{3}}$	$x+\sqrt{3}=0$
	$x=-\sqrt{\mathbf{3}}$

Równanie ma trzy rozwiązania: $x=\sqrt[4]{\mathbf{3}},\ x=-\sqrt[4]{\mathbf{3}},\ x=-\sqrt{\mathbf{3}}$. Ich iloczyn wynosi:

$$\sqrt[4]{3}\cdot\left(-\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=3^{\frac{1}{4}}\cdot\left(-3^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(-3^{\frac{1}{2}}\right)=3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=3^{\frac{4}{4}}=3^1=\mathbf{3}.$$

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

Licząc iloczyn, korzystamy z kalkulatora (przybliżamy $\sqrt{3}\approx 1{,}732$ oraz $\sqrt[4]{3}\approx 1{,}316$).

Kombinacja klawiszy konieczna do uzyskania przybliżenia $\sqrt[4]{3}$ to: $\boxed{3}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}$.

$\sqrt[4]{3}\cdot\left(-\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\approx 1{,}316\cdot(-1{,}316)\cdot(-1{,}732)=1{,}316\cdot 1{,}316\cdot 1{,}732\approx 2{,}9999\approx\mathbf{3}$. Oznacza to, że odp. **D** jest poprawna.

6.39.

Zaczynamy od założenia zapobiegającego **dzieleniu przez zero**.
Mianownik nie może być zerem: $x^2+25\neq 0$, więc $x^2\neq -25$.
Liczba nieujemna $\boldsymbol{x^2}$ nigdy **nie będzie równa** liczbie ujemnej **–25**.
Oznacza to, że dla dowolnej rzeczywistej wartości x mianownik będzie różny od zera.

$$\boldsymbol{x^2} \neq \boldsymbol{-25}$$

liczba nieujemna $\neq$ liczba ujemna

W tej sytuacji, każda z liczb **mogących** być rozwiązaniem równania $\frac{(x-5)(x-25)(5x-10)}{x^2+25}=0$, faktycznie **będzie** tym rozwiązaniem.

Rozwiązujemy równanie:

$x-5=0$	$x-25=0$	$5x-10=0$
$x=\mathbf{5}$	$x=\mathbf{25}$	$5x=10 \quad \mid :5$
		$x=\mathbf{2}$

Obliczamy **sumę** rozwiązań równania: $5+25+2=\mathbf{32}$.

Odp. **C**

6.40.

Zaczynamy od założenia zapobiegającego dzieleniu przez zero. Mianownik różny od zera:

$x^2-4\neq 0$

$x^2\neq 4$

$x\neq\sqrt{4} \quad i \quad x\neq -\sqrt{4}$

$x\neq \mathbf{2} \quad i \quad x\neq \mathbf{-2}$

Rozwiązujemy równanie:

$x+2=0$	$2x-3=0$	$3x-4=0$
$x=\mathbf{-2}$	$2x=3 \quad \mid :2$	$3x=4 \quad \mid :3$
	$x=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$	$x=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

Rozwiązaniami równania **mogą być** liczby $x=\mathbf{-2},\ x=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ x=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$.

Rozwiązaniem **nie będzie** $x=\mathbf{-2}$ ze względu na założenia $x\neq\mathbf{2} \quad i \quad x\neq\mathbf{-2}$.

Rozwiązaniami równania będą zatem: $x=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ x=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$.

Obliczamy **iloczyn** rozwiązań: $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{12}{6}=\mathbf{2}$.

Odp. **D**

6.41.

Zadania 6.41 – 6.45 mają sprawdzić umiejętność oceniania, czy podana liczba jest rozwiązaniem równania. Nie trzeba zatem rozwiązywać równania, tylko podstawiać w miejsce *x* proponowane liczby i zaznaczyć tę odpowiedź, dla której lewa strona równania będzie równa prawej stronie.

$2^2 = 64 \cdot 2$ sprawdzamy odp. A

$4 = 128$ równość fałszywa, odp. A jest niepoprawna

$8^8 = 64 \cdot 8$ sprawdzamy odp. B

$16777216 = 512$ równość fałszywa, odp. B jest niepoprawna

$4^4 = 64 \cdot 4$ sprawdzamy odp. C

256 = 256 **równość prawdziwa**

Odp. **C**

6.42.

W miejsce *x* podstawiamy liczby proponowane w odpowiedziach:

$$\frac{\sqrt{4 \cdot 1 + 5}}{2} = 1^2 - 0{,}5$$ sprawdzamy odp. A

$$\frac{\sqrt{4 + 5}}{2} = 1 - 0{,}5$$

$$\frac{\sqrt{9}}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{3}{2} = 0{,}5$$ równość fałszywa, odp. A jest niepoprawna

$$\frac{\sqrt{4 \cdot (-1) + 5}}{2} = (-1)^2 - 0{,}5$$ sprawdzamy odp. B

$$\frac{\sqrt{-4 + 5}}{2} = 1 - 0{,}5$$

$$\frac{\sqrt{1}}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$ równość **prawdziwa**

Odp. **B**

6.43.

$(-2)^2 \cdot \left(-2+4\cdot(-2)^3\right)=(-2)^5-104$ sprawdzamy odp. A

$4\cdot\left(-2+4\cdot(-8)\right)=-32-104$

$4\cdot(-2-32)=-32-104$

$4\cdot(-34)=-136$

$\mathbf{-136=-136}$ **równość prawdziwa**

Odp. **A**

6.44.

$\frac{2^0+3^0}{0^2+0^3}=\frac{0+11}{14-0}+\frac{4\cdot 0^2-16}{0^4}$

$\frac{1+1}{0+0}=\frac{11}{14}+\frac{0-16}{0}$ sprawdzamy odp. A

zero w mianowniku

$\frac{2^1+3^1}{1^2+1^3}=\frac{1+11}{14-1}+\frac{4\cdot 1^2-16}{1^4}$

$\frac{2+1}{1+1}=\frac{12}{13}+\frac{4-16}{1}$ sprawdzamy odp. B

$\frac{3}{2}=\frac{12}{13}+(-12)$ korzystamy z $\frac{12}{13}\approx 0{,}92$

$1{,}5\approx 0{,}92-12$ równość fałszywa

$\frac{2^2+3^2}{2^2+2^3}=\frac{2+11}{14-2}+\frac{4\cdot 2^2-16}{2^4}$ sprawdzamy odp. C

$\frac{4+9}{4+8}=\frac{13}{12}+\frac{4\cdot 4-16}{16}$

$\frac{13}{12}=\frac{13}{12}+\frac{0}{16}$

$\mathbf{\frac{13}{12}=\frac{13}{12}}$ równość **prawdziwa**

Odp. **C**

6.45.

$5^{-5+1} = 1$, więc $5^{-4} = 1$ sprawdzamy odp. A (równość fałszywa)

$5^{\frac{1}{5}+1} = 1$, więc $5^{1\frac{1}{5}} = 1$ → $5^{\frac{6}{5}} = 1$ → $\sqrt[5]{5^6} = 1$ sprawdzamy odp. B (równość fałszywa)

$5^{0+1} = 1$, więc $5^1 = 1$ sprawdzamy odp. C (równość fałszywa)

$5^{-1+1} = 1$, więc $5^0 = 1$ → $\mathbf{1 = 1}$ sprawdzamy odp. D (równość **prawdziwa**)

Odp. **D**

6.46.

W zadaniach 6.46 – 6.50 należy sprawdzać, czy podana liczba należy do zbioru rozwiązania nierówności. Nie trzeba rozwiązywać nierówności, tylko wstawiać po kolei proponowane liczby aż do momentu, gdy natrafimy na liczbę, dla której nierówność jest prawdziwa.

Sprawdzamy odp. A → dla $x = -2$

$\frac{(-2)^5 - (-2)^4}{16 - (-2)^3} < 4 \cdot (-2)$

$\frac{-32 - (16)}{16 - (-8)} < -8$

$\frac{-32 - 16}{16 + 8} < -8$

$\frac{-48}{24} < -8$

$-2 < -8$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. B → dla $x = 1$

$\frac{1^5 - 1^4}{16 - 1^3} < 4 \cdot 1$

$\frac{1 - 1}{16 - 1} < 4$

$\frac{0}{15} < 4$

$\mathbf{0 < 4}$

nierówność **prawdziwa**

Odp. **B**

6.47.

Sprawdzamy odp. A → dla $x = 1$

$1^2 - 4 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1 \geq 1 - 2 \cdot 1^2$

$1 - 4 - 5 - 10 \geq 1 - 2$

$-18 \geq -1$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. B → dla $x = 0$

$0^2 - 4 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^4 - 10 \cdot 0 \geq 1 - 2 \cdot 0^2$

$0 - 0 - 0 - 0 \geq 1 - 0$

$0 \geq 1$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. C → dla $x = -2$

$(-2)^2 - 4 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^4 - 10 \cdot (-2) \geq 1 - 2 \cdot (-2)^2$

$4 - 4 \cdot (-8) - 5 \cdot 16 - 10 \cdot (-2) \geq 1 - 2 \cdot 4$

$4 + 32 - 80 + 20 \geq 1 - 8$

$-24 \geq -7$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. D → dla $x = -1$

$(-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1) \geq 1 - 2 \cdot (-1)^2$

$1 - 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 - 10 \cdot (-1) \geq 1 - 2 \cdot 1$

$1 + 4 - 5 + 10 \geq 1 - 2$

$\mathbf{10 \geq -1}$

nierówność **prawdziwa**

Odp. **D**

6.48.

Sprawdzamy odp. A → dla $x=-1$

$3\cdot(-1)^2\cdot\left(1-(-1)^3\right)>2-(-1)^4$

$3\cdot1\cdot(1-(-1))>2-(1)$

$3\cdot1\cdot(1+1)>2-1$

$3\cdot1\cdot2>2-1$

$\mathbf{6>1}$

nierówność **prawdziwa**

Odp. **A**

6.49.

Sprawdzamy odp. A → dla $x=-3$

$\frac{-3+1}{4-(-3)^4}\le 3^{-3-1}+2\cdot(-3)$

$\frac{-2}{4-(81)}\le 3^{-4}-6$

$\frac{-2}{4-81}\le\frac{1}{3^4}-6$

$\frac{-2}{-77}\le\frac{1}{81}-6$

$\underbrace{\frac{2}{77}}\le\underbrace{\frac{1}{81}-6}$

dodatnia $\le$ ujemna

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. C → dla $x=-1$

$\frac{-1+1}{4-(-1)^4}\le 3^{-1-1}+2\cdot(-1)$

$\frac{0}{4-(1)}\le 3^{-2}-2$

$0\le\frac{1}{3^2}-2$

$\underbrace{0}\le\underbrace{\frac{1}{9}-2}$

0 $\le$ ujemna

Sprawdzamy odp. B → dla $x=-2$

$\frac{-2+1}{4-(-2)^4}\le 3^{-2-1}+2\cdot(-2)$

$\frac{-1}{4-(16)}\le 3^{-3}-4$

$\frac{-1}{4-16}\le\frac{1}{3^3}-4$

$\frac{-1}{-12}\le\frac{1}{27}-4$

$\underbrace{\frac{1}{12}}\le\underbrace{\frac{1}{27}-4}$

dodatnia $\le$ ujemna

nierówność fałszywa

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. D → dla $x=0$

$\frac{0+1}{4-0^4}\le 3^{0-1}+2\cdot0$

$\frac{1}{4-0}\le 3^{-1}+0$

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{3}$

0,25 ≤ 0,3333....

nierówność **prawdziwa**

Odp. **D**

6.50.

Sprawdzamy odp. A → dla $x = 1$

$\left(2-1^4\right)\left(2-1^3\right) \le 0$

$\left(2-1\right)\left(2-1\right) \le 0$

$1 \cdot 1 \le 0$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. B → dla $x = -1$

$\left(2-(-1)^4\right)\left(2-(-1)^3\right) \le 0$

$\left(2-(1)\right)\left(2-(-1)\right) \le 0$

$\underbrace{\left(2-1\right)}_{1}\underbrace{\left(2+1\right)}_{3} \le 0$

$1 \cdot 3 \le 0$

nierówność fałszywa

Sprawdzamy odp. C → dla $x = -2$

$\left(2-\underbrace{(-2)^4}_{16}\right)\left(2-\underbrace{(-2)^3}_{(-8)}\right) \le 0$

$\underbrace{\left(2-16\right)}_{-14}\left(2-(-8)\right) \le 0$

$-14 \cdot \left(2+8\right) \le 0$

$\underbrace{-14 \cdot 10}_{-140} \le 0$

nierówność **prawdziwa**

Sprawdzamy odp. D → dla $x = 2$

$\left(2-2^4\right)\left(2-2^3\right) \le 0$

$\underbrace{\left(2-16\right)}_{-14}\underbrace{\left(2-8\right)}_{(-6)} \le 0$

$-14 \cdot \left(-6\right) \le 0$

$84 \le 0$

nierówność fałszywa

Odp. **C**

6.51.

$\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}<x \qquad |\cdot 6$ — mnożymy stronami przez najmniejszą wspólną

$\mathbf{6}\cdot\frac{x-3}{2}-\mathbf{6}\cdot\frac{x-2}{3}<\mathbf{6}\cdot x$ — wielokrotność mianowników (czyli przez 6)

$\frac{6(x-3)}{2}-\frac{6(x-2)}{3}<6x$ — skracamy ułamki, pozbywając się mianowników

$3(x-3)-2(x-2)<6x$ — wymnażamy nawiasy

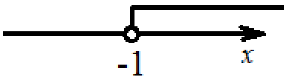
$3x-9-2x+4<6x$ — przenosimy niewiadome na lewo, a wiadome na prawo

$3x-2x-6x<9-4$ — redukujemy wyrazy podobne

$-5x<5 \qquad |:(-5)$ — dzielimy stronami przez (–5)

$x>\mathbf{-1}$ — pamiętajmy o **zmianie zwrotu** nierówności, dzieląc nierówność stronami przez **liczbę ujemną**

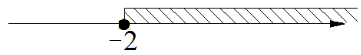
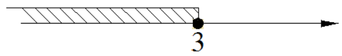
Rozwiązaniem jest $x>\mathbf{-1}$, czyli zbiór liczb większych od –1. Zaznaczamy na osi liczbowej:



, w formie przedziału liczbowego: $x\in(\mathbf{-1},+\infty)$.

Odp. **D**

Sposób zapisu niektórych przedziałów liczbowych:

			zbiór wszystkich liczb...	uwagi
$x>6$		$x\in(6;+\infty)$	większych od 6	6 **NIE należy !!**
$x\geqslant -2$		$x\in\langle -2;+\infty)$	większych lub równych -2	-2 **należy !!!**
$x<-5$		$x\in(-\infty;-5)$	mniejszych od -5	-5 **NIE należy !!**
$x\leqslant 3$		$x\in(-\infty;3\rangle$	mniejszych lub równych 3	3 **należy !!!**

6.52.

$2x-\frac{2-5x}{3}\geq 3 \quad |\cdot 3$ mnożymy stronami przez mianownik (przez 3)

$\mathbf{3}\cdot 2x-\mathbf{3}\cdot\frac{2-5x}{3}\geq \mathbf{3}\cdot 3$

$6x-\frac{\mathbf{3}(2-5x)}{3}\geq 9$ skracamy ułamki, ale zostawiamy nawias!

$6x-(2-5x)\geq 9$

$6x-2+5x\geq 9$ opuszczamy nawias

$6x+5x\geq 9+2$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$11x\geq 11 \quad |:11$ redukcja wyrazów podobnych

$x\geq \mathbf{1}$ przy dzieleniu stronami przez liczbę **dodatnią** **nie zmieniamy** zwrotu nierówności

Odp. **A**

6.53.

$5-\frac{3x-1}{4}+\frac{2x-7}{2}\leq\frac{9x-3}{8} \quad |\cdot 8$ mnożymy stronami przez najmniejszą wspólną

$\mathbf{8}\cdot 5-\mathbf{8}\cdot\frac{3x-1}{4}+\mathbf{8}\cdot\frac{2x-7}{2}\leq \mathbf{8}\cdot\frac{9x-3}{8}$ wielokrotność mianowników (czyli przez 8)

$40-\frac{\mathbf{8}(3x-1)}{4}+\frac{\mathbf{8}(2x-7)}{2}\leq\frac{\mathbf{8}(9x-3)}{8}$ skracamy ułamki

$40-2(3x-1)+4(2x-7)\leq 9x-3$ wymnażamy nawiasy

$40-6x+2+8x-28\leq 9x-3$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$-6x+8x-9x\leq -3-40-2+28$ redukcja wyrazów podobnych

$-7x\leq -17 \quad |:(-7)$ dzielimy stronami przez (–7)

$x\geq\frac{-17}{-7}$ przy dzieleniu stronami przez liczbę **ujemną**

$x\geq\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{7}}$ **zmieniamy** zwrot nierówności

Odp. **B**

6.54.
Rozwiązujemy każdą nierówność osobno:
Sprawdzamy odp. A:

$\frac{x-1}{2} > 0{,}5x \quad |\cdot 2$ mnożymy stronami przez 2

$\mathbf{2} \cdot \frac{x-1}{2} > \mathbf{2} \cdot 0{,}5x$

$\frac{\mathbf{2}(x-1)}{2} > x$ skracamy ułamek

$x-1 > x$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$x-x > 1$ redukcja wyrazów podobnych

$0 > 1$ sprzeczność

Sprawdzamy odp. B:

$\frac{x+1}{2} > 0{,}5x \quad |\cdot 2$ mnożymy stronami przez 2

$\mathbf{2} \cdot \frac{x+1}{2} > \mathbf{2} \cdot 0{,}5x$

$\frac{\mathbf{2}(x+1)}{2} > x$ skracamy ułamek

$x+1 > x$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$x-x > -1$ redukcja wyrazów podobnych

$\mathbf{0 > -1}$ nierówność **prawdziwa**

Odp. **B**

6.55.

$\frac{46-2x}{7} > \frac{x+6}{2} + x \quad |\cdot 14$ mnożymy stronami przez 14 (najmniejszą

$\mathbf{14} \cdot \frac{46-2x}{7} > \mathbf{14} \cdot \frac{x+6}{2} + \mathbf{14} \cdot x$ wspólną wielokrotność mianowników)

$\frac{\mathbf{14}(46-2x)}{7} > \frac{\mathbf{14}(x+6)}{2} + \mathbf{14}x$ skracamy ułamki

$2(46-2x) > 7(x+6) + 14x$ wymnażamy nawiasy

$92 - 4x > 7x + 42 + 14x$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$-4x - 7x - 14x > 42 - 92$ redukcja wyrazów podobnych

$-25x > -50 \quad |:(-25)$ dzielimy stronami przez (–25)

$x < \frac{-50}{-25}$ zmiana zwrotu nierówności (dzielenie przez liczbę ujemną)

$x < \mathbf{2}$ skracamy ułamek

Wynik: $x < \mathbf{2}$ oznacza zbiór wszystkich liczb mniejszych od 2.

Odp. **B**

6.56.

$0 > \frac{18+5x}{3} \quad |\cdot 3$ mnożymy stronami przez 3

$\mathbf{3} \cdot 0 > \mathbf{3} \cdot \frac{18+5x}{3}$

$0 > \frac{\mathbf{3}(18+5x)}{3}$ skracamy ułamek

$0 > 18+5x$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$-5x > 18 \quad |:(-5)$

$x < \frac{18}{-5} \quad \rightarrow \quad x < -\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}.$

Odp. **D**

6.57.

$\frac{-13-2x}{7} \geq 0 \quad |\cdot 7$ mnożymy stronami przez 7

$\mathbf{7} \cdot \frac{-13-2x}{7} \geq \mathbf{7} \cdot 0$

$\frac{\mathbf{7}(-13-2x)}{7} \geq 0$ skracamy ułamek

$-13-2x \geq 0$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$-2x \geq 13 \quad |:(-2)$ dzielimy stronami przez (–2)

$x \leq \frac{13}{-2} \quad \rightarrow \quad x \leq -\frac{13}{2} \quad \rightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}\right\rangle.$

Odp. **A**

6.58.

$\frac{3-4x}{2} < 0 \quad |\cdot 2$ mnożymy stronami przez 2

$\mathbf{2} \cdot \frac{3-4x}{2} < \mathbf{2} \cdot 0$

$\frac{\mathbf{2}(3-4x)}{2} < 0$ skracamy ułamek

$3-4x<0$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$-4x<-3 \quad |:(-4)$ dzielimy stronami przez (–4)

$x > \frac{-3}{-4} \quad \rightarrow \quad x > \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

Wynik: $x > \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ oznacza zbiór wszystkich liczb większych od $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

Odp. **B**

6.59.

$\frac{6+x}{2} > 0 \quad |\cdot 2$ mnożymy stronami przez 2

$\mathbf{2} \cdot \frac{6+x}{2} > \mathbf{2} \cdot 0$

$\frac{\mathbf{2}(6+x)}{2} > 0$ skracamy ułamek

$6+x>0$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$x > \mathbf{-6}$

Wynik, czyli $x > \mathbf{-6}$, oznacza zbiór wszystkich liczb **większych** od –6.

Odp. **D**

6.60.

$\frac{2(x-1)}{3} \le 0$ wymnażamy nawias przez 2

$\frac{2x-2}{3} \le 0 \quad |\cdot 3$ mnożymy stronami przez 3

$\mathbf{3} \cdot \frac{2x-2}{3} \le \mathbf{3} \cdot 0$

$\frac{\mathbf{3}(2x-2)}{3} \le 0$ skracamy ułamek

$2x-2 \le 0$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$2x \le 2 \quad |:2$ dzielimy stronami przez 2

$x \le \mathbf{1}$.

Wynik, czyli $x \le \mathbf{1}$, oznacza zbiór wszystkich liczb mniejszych bądź równych **1**.

Odp. **B**

6.61.

Należy **rozwiązać oddzielnie** nierówności $x-1\le 3$ oraz $3<2x$, a następnie uwzględnić **część wspólną** rozwiązań obu nierówności.

$$x-1\le 3$$

$$x\le 3+1$$

$$x\le 4$$

$$3<2x$$

$$-2x<-3 \quad |:(-2)$$

$$x>\frac{3}{2}$$

Część wspólna obu przedziałów:

Z przedziału będącego **częścią wspólną** odczytujemy rozwiązanie:

$$x\in\left(\tfrac{3}{2},4\right\rangle$$

Przedział $x\in\left(\frac{3}{2},4\right\rangle$ zapiszemy jako $\frac{3}{2}<x\le \mathbf{4}$.

Odp. **C**

Sposób zapisu niektórych przedziałów liczbowych:

$-4<x<2$	$x\in(-4,2)$	-4 NIE należy ○ 2 NIE należy ○
$-4\leqslant x<2$	$x\in\langle -4,2)$	-4 należy ● 2 NIE należy ○
$-4<x\leqslant 2$	$x\in(-4,2\rangle$	-4 NIE należy ○ 2 należy ●
$-4\leqslant x\leqslant 2$	$x\in\langle -4,2\rangle$	-4 należy ● 2 należy ●

6.62.

Rozwiązanie I:

$3 \leq -x < 4$ — mnożymy stronami przez (–1)

$-3 \geq x > -4$ — przy mnożeniu nierówności stronami przez liczbę ujemną, **zmieniamy zwrot** nierówności

Wynik: $-3 \geq x > -4$ oznacza zbiór liczb między –3 a –4, przy czym **–3** należy do zbioru, a liczba **–4** nie należy do niego.

Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $3 \leq -x$ oraz $-x < 4$.

$3 \leq -x$

$x \leq \mathbf{-3}$

$-x < 4 \quad |:(-1)$

$x > \mathbf{-4}$

Część wspólna obu przedziałów:

Odp. **B** jest poprawna.

6.63.

Rozwiązanie I:

$-4 \le x-1 \le 6 \quad |+1$ — do każdego z trzech wyrażeń dodajemy

$-4+\mathbf{1} \le x-1+\mathbf{1} \le 6+\mathbf{1}$ — jedynkę, aby w środku otrzymać sam $\boldsymbol{x}$

$-3 \le x \le 7$ — wykonujemy działania

Warunek $-\mathbf{3} \le x \le \mathbf{7}$ oznacza, że x należy do przedziału $\langle -\mathbf{3}, \mathbf{7} \rangle$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

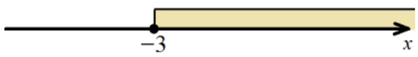
Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $-4 \le x-1$ oraz $x-1 \le 6$.

$-4 \le x-1$

$-x \le -1+4$

$-x \le 3 \quad |:(-1)$

$x \ge -\mathbf{3}$



$x-1 \le 6$

$x \le 6+1$

$x \le \mathbf{7}$

Część wspólna obu przedziałów:

Odp. **A** jest poprawna.

6.64.
Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $-2x < x+1$ oraz $x+1 \le 7$.

$-2x - x < 1$

$-3x < 1 \quad |:(-3)$

$x > -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

$x+1 \le 7$

$x \le 7-1$

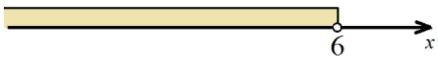
$x \le \mathbf{6}$

Oznacza to, że muszą być jednocześnie spełnione warunki $x > -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ i $x \le \mathbf{6}$.

Odp. **A**

6.65.
Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $x < 6$ oraz $6 < 2x$.

$x < \mathbf{6}$



$6 < 2x$

$-2x < -6 \quad |:(-2)$

$x > \mathbf{3}$

Część wspólna obu przedziałów:

Do **części wspólnej** obu przedziałów należą wszystkie liczby od 3 do 6, więc $\mathbf{3} < x < \mathbf{6}$.
Odp. **D**

6.66.

Rozwiązanie I:

$\frac{2}{3}-\frac{3x}{4}<5 \qquad |\cdot 12$ mnożymy nierówność stronami przez

$\mathbf{12}\cdot\frac{2}{3}-\mathbf{12}\cdot\frac{3x}{4}<\mathbf{12}\cdot 5$ najmniejszą wspólną wielokrotność

$\frac{\mathbf{12}\cdot 2}{3}-\frac{\mathbf{12}\cdot 3x}{4}<60$ mianowników (czyli przez 12)

$8-9x<60$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

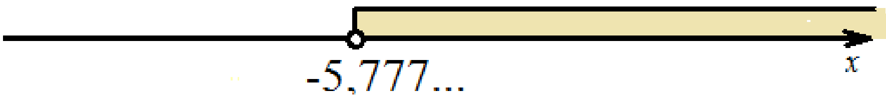
$-9x<60-8$

$-9x<52 \qquad |:(-9)$

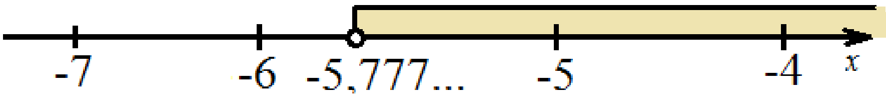
$x>-\frac{52}{9}$ korzystamy z tego, że $-\frac{52}{9}\approx\mathbf{-5{,}777...}$

$x>\mathbf{-5{,}777...}$

Warunek $x>-5{,}777...$ ilustrujemy symbolicznie na osi liczbowej:



Na osi liczbowej zaznaczamy teraz najbliższe liczby całkowite:



Z powyższego rysunku wynika, że to **–5** jest najmniejszą z liczb całkowitych z przedziału.
Odp. **C**

Rozwiązanie II:

$\frac{2}{3}-\frac{3x}{4}<5$ korzystamy z tego, że $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ oraz $\frac{3}{4}=0{,}75$

$0{,}67-0{,}75x<5$ w miejsce x podstawiamy **najmniejszą** z proponowanych w odpowiedziach liczb całkowitych (jest to liczba –6)

$0{,}67-0{,}75\cdot(-6)<5$

$0{,}67+4{,}5<5$ liczymy lewą stronę nierówności

$5{,}17<5$ nierówność fałszywa, odrzucamy odp. D

$0{,}67-0{,}75\cdot(-5)<5$ w miejsce x podstawiamy kolejną najmniejszą

$0{,}67+3{,}75<5$ proponowaną w odpowiedziach liczbę całkowitą, czyli liczbę –5

$\mathbf{4{,}42<5}$ nierówność **prawdziwa**

Oznacza to, że odp. **C** jest prawidłowa.

6.67.
Rozwiązanie I:

$5 \le \frac{x}{2}+4<8 \qquad |-4$ odejmujemy od każdej ze stron liczbę 4

$5-\mathbf{4} \le \frac{x}{2}+4-\mathbf{4}<8-\mathbf{4}$ upraszczamy wartości wyrażeń

$1 \le \frac{x}{2}<4 \qquad |\cdot 2$ mnożymy stronami przez 2

$\mathbf{2}\cdot 1 \le \mathbf{2}\cdot\frac{x}{2}<\mathbf{2}\cdot 4$

$2 \le x<8$

Zaznaczamy przedział na osi liczbowej, odpowiadający warunkowi $2 \le x<8$:

Zaznaczamy teraz w tym przedziale liczby **naturalne parzyste**:

Największa parzysta i naturalna liczba mieszcząca się w tym przedziale to **6**.
Odp. **B**

Rozwiązanie II:

Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $5 \le \frac{x}{2}+4$ oraz $\frac{x}{2}+4<8$.

$5 \le \frac{x}{2}+4 \qquad |\cdot 2$

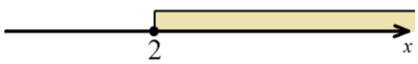
$\mathbf{2}\cdot 5 \le \mathbf{2}\cdot\frac{x}{2}+\mathbf{2}\cdot 4$

$10 \le x+8$

$-x \le 8-10$

$-x \le -2 \qquad |:(-1)$

$x \ge \mathbf{2}$



$\frac{x}{2}+4<8 \qquad |\cdot 2$

$\mathbf{2}\cdot\frac{x}{2}+\mathbf{2}\cdot 4<\mathbf{2}\cdot 8$

$x+8<16$

$x<16-8$

$x<\mathbf{8}$

Część wspólna obu przedziałów:

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $\langle 2,8)$.

Liczba 8 jest naturalna, parzysta, ale **nie należy** do przedziału $\langle 2,8)$.

Liczba 7 jest naturalna, ale nie jest parzysta.

Liczba 6 jest naturalna, parzysta i **należy** do przedziału $\langle 2,8)$. Odp. **B** jest poprawna.

6.68.

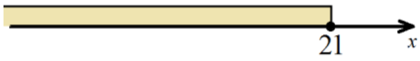
Rozwiązujemy oddzielnie nierówności $93 - x \geq 2x$ oraz $4x - 3 > 27$.

$93 - x \geq 2x$

$-x - 2x \geq -93$

$-3x \geq -93 \qquad |:(-3)$

$x \leq \mathbf{21}$



$4x - 3 > 27$

$4x > 27 + 3$

$4x > 30 \qquad |:4$

$x > \frac{30}{4}$

$x > \mathbf{7{,}5}$

Część wspólna obu przedziałów:

Do **części wspólnej** $(7{,}5; 21\rangle$ **nie należą** liczby: 31 oraz 7. Odrzucamy odp. A i D.

Liczba 8 jest parzysta, więc odrzucamy odp. C. Zatem w zadaniu chodzi o liczbę **9**.

Odp. **B**

6.69.

$f(x) > g(x)$

$4x + 33 > 8 - x$ niewiadome na lewo, wiadome na prawo

$4x + x > 8 - 33$ redukcja wyrazów podobnych

$5x > -25 \qquad |:5$

$x > \mathbf{-5}$

Zaznaczamy na osi liczbowej przedział wynikający z warunku $x > \mathbf{-5}$:

Zauważmy, że liczba –5 **nie należy** do przedziału (kółko niezamalowane).
Zatem odrzucamy odp. B.

Zaznaczamy na osi liczby całkowite towarzyszące liczbie –5:

Liczba **–4** jest najmniejszą liczbą całkowitą, która „wpada” w przedział.
Odp. **C**

6.70.

Rozwiązanie I:

$1-2017x \leq 4032$ — niewiadome na lewo, wiadome na prawo

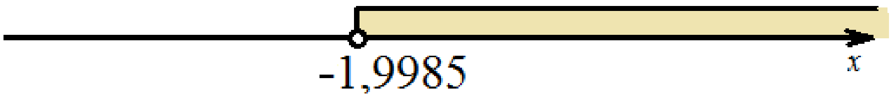
$-2017x \leq 4032-1$

$-2017x \leq 4031 \qquad |:(-2017)$

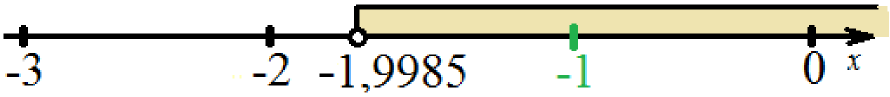
$x \geq -\frac{4031}{2017}$ — przybliżamy $-\frac{4031}{2017} \approx \mathbf{-1{,}9985}$

$x \geq \mathbf{-1{,}9985}$

Zaznaczamy na osi liczbowej przedział wynikający z warunku $x > \mathbf{-1{,}9985}$:



Zaznaczamy na osi liczby całkowite towarzyszące liczbie **–1,9985**:



Liczba **–1** jest najmniejszą liczbą całkowitą, która „wpada” w przedział rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

Odp. **A**

Rozwiązanie II:

Wybieramy **możliwie najmniejsze** liczby wśród proponowanych w odpowiedziach. Podstawiamy je w miejsce x i sprawdzamy, czy nierówność jest prawdziwa:

$1-2017x \leq 4032$ — sprawdzamy odp. B (liczbę $x = -2$)

$1-2017\cdot(-2) \leq 4032$ — upraszczamy nierówność, zgodnie z kolejnością wykonywania działań

$1+4034 \leq 4032$

$4035 \leq 4032$ — nierówność fałszywa, odrzucamy odp. B

$1-2017\cdot(-1) \leq 4032$ — sprawdzamy odp. A (liczbę $x = -1$)

$1+2017 \leq 4032$ — nierówność **prawdziwa**, odp. **A** jest prawidłowa

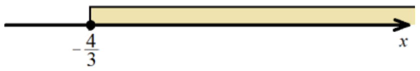
6.71.

Rozwiązanie I:

$-4 \leq 3x$

$-3x \leq 4 \quad |:(-3)$

$x \geq -\frac{4}{3}$



$3x < 7 \quad |:3$

$x < \frac{7}{3}$

Część wspólna obu przedziałów:

$$x \in \left\langle -\frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

Oznacza to, że $a = -\mathbf{\frac{4}{3}}$, $b = \mathbf{\frac{7}{3}}$.

Obliczamy $b - a = \frac{7}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$, zatem odrzucamy odpowiedzi A i B.

Obliczamy $a + b = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$.

Odp. **D**

Rozwiązanie II:

$-4 \leq 3x < 7 \quad |:3$

$-\frac{4}{3} \leq x < \frac{7}{3}$

$x \in \left\langle -\frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right) \quad \rightarrow \quad a = -\frac{4}{3},\ b = \frac{7}{3}$

$a + b = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$, więc odp. **D** jest prawidłowa.

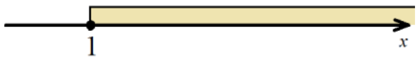
6.72.

$x \leq 2x - 1$

$x - 2x \leq -1$

$-x \leq -1 \qquad |:(-1)$

$x \geq \mathbf{1}$



$2x - 1 \leq 9$

$2x \leq 9 + 1$

$2x \leq 10 \qquad |:2$

$x \leq \mathbf{5}$

Część wspólna obu przedziałów:

$x \in \langle 1, 5 \rangle$

Oznacza to, że $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{5}$.

Suma $a + b = 1 + 5 = \mathbf{6}$.

Odp. **D**

6.73.

$-30 < 2x$

$-2x < 30 \qquad |:(-2)$

$x > \mathbf{-15}$

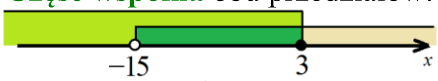
$2x \leq 9 - x$

$2x + x \leq 9$

$3x \leq 9 \qquad |:3$

$x \leq \mathbf{3}$

Część wspólna obu przedziałów:



$x \in (-15, 3\rangle$

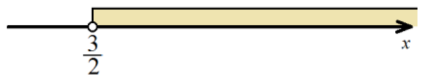
Okazało się, że przedział liczbowy $(-15, b\rangle$ jest równy $(-15, 3\rangle$. Zatem $\boldsymbol{b} = \mathbf{3}$.

Odp. **A**

6.74.

$3-x(2-x)<x^2$	wymnażamy nawias
$3-2x+x^2<x^2$	przenosimy x^2 z prawej strony na lewą
$3-2x+x^2-x^2<0$	redukcja wyrazów podobnych
$3-2x<0$	niewiadome na lewo, wiadome na prawo
$-2x<-3 \qquad \vert :(-2)$	dzielimy obustronnie przez (–2)
$x>\frac{-3}{-2} \qquad \rightarrow \qquad x>\mathbf{\frac{3}{2}}$.	pamiętajmy o zmianie zwrotu nierówności

Zaznaczamy zbiór na osi liczbowej, opisany warunkiem $x>\mathbf{\frac{3}{2}}$:



Okazało się, że przedział $(a,+\infty)$ jest równy $\left(\mathbf{\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Zatem $a=\mathbf{\frac{3}{2}}$.

Odp. **D**

6.75.

$x\le 2x+3$
$x-2x\le 3$
$-x\le 3 \qquad \vert :(-1)$
$x\ge \mathbf{-3}$

$2x+3<4$
$2x<4-3$
$2x<1 \qquad \vert :2$
$x<\mathbf{0{,}5}$

Część wspólna obu przedziałów:

$x\in\langle -3;\ 0{,}5)$

Okazuje się, że przedział liczbowy $\langle a,b)$ jest równy $\langle -3;\ 0{,}5)$, zatem $\boldsymbol{a}$ **= –3**, $\boldsymbol{b}$ **= 0,5**.

Obliczamy $\frac{b}{a}=\frac{0{,}5}{-3}=\mathbf{-0{,}166666}...$

Dopasowujemy odpowiedź:

A: $-\frac{2}{3}=-0{,}666666\neq-0{,}166666$

B: $-\frac{1}{5}=-0{,}2\neq-0{,}166666$

C: $-\mathbf{\frac{1}{6}}=\mathbf{-0{,}166666}...$

D: $-\frac{3}{2}=-1{,}5\neq-0{,}166666$

Odp. **C**